1 Exercice 1 :

Le jeu de Chomp est un jeu pour deux joueurs qui se déroule sur une grille rectangulaire, composée de différents petits carrés de chocolat. A tour de rôle, les deux joueurs «mangent» des carrés. Le carré en haut à gauche est empoisonné : celui qui prend ce carré a perdu. Chacun leur tour, les joueurs choisissent une case de la grille et mangent toutes les cases situées en dessous et à droite de la case choisie.

1. Donner une stratégie gagnante dans le cas où la grille est de taille $1 \times n$.
2. Représenter le jeu pour une tablette 2×3 à l'aide d'un graphe et déterminer une stratégie gagnante.
3. On se place dans le cas d'une grille $2 \times n$. Combien de positions sont possibles ? Combien de coups sont possibles (c'est a dire le nombre de façons de passer d'une position à une autre) ? Déterminer une stratégie gagnante si possible.
4. Montrer que quelle que soit la tablette initiale, l'un des deux joueurs possède une stratégie gagnante.
5. Déterminer dans le cas $n \times m$ pour quel joueur on peut déterminer une stratégie gagnante (sans chercher à echiber cette dernière).

2 Exercice 2 :

Le jeu de Nim est un jeu à deux joueurs où chaque joueur doit à son tour retirer une ou plusieurs allumettes dans un parmi plusieurs tas d'allumettes. On distingue deux variantes de jeu :

— la variante classique où le gagnant est celui qui retire la dernière allumette ;
— la variante misère où celui qui retire la dernière allumette est le perdant. Dans sa version la plus simple, il n'y a qu'un tas d'allumettes : n allumettes sont placées côte à côte et tour à tour, chaque joueur doit retirer une ou plusieurs allumettes. On note $^*n$ un jeu de Nim avec un tas de n allumettes.

1. Montrer que quelle que soit la variante, il existe toujours un joueur qui possède une stratégie gagnante au jeu $^*n$.
2. On suppose $n \geq 2$. Déterminer quel joueur possède une stratégie gagnante dans le jeu $^*n$, selon la variante choisie.

Lorsqu'on considère un jeu de Nim à plusieurs tas, on note de manière additive le jeu considéré. Par exemple, la figure 2 représente le jeu de Nim $^*1 +^* 3 +^* 5 +^* 7$. À chaque tour de jeu, un joueur doit prendre une ou plusieurs allumettes sur une même ligne.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe une stratégie gagnante facile à appliquer pour le joueur 2 dans la variante classique du jeu $*n + *n$.
4. Soit $1 \leqslant m < n$ deux entiers. Montrer qu'il existe une stratégie gagnante pour le joueur 1 dans la variante classique du jeu $*m + *n$.
5. Déterminer quel joueur possède une stratégie gagnante dans la variante misère pour $*1 + *n$, $n \geqslant 1$, $*2 + *2$ et $*2 + *n$, $n \geqslant 3$.
6. Que dire des questions 3 et 4 dans la variante misère ?

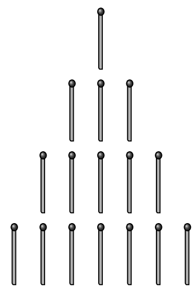


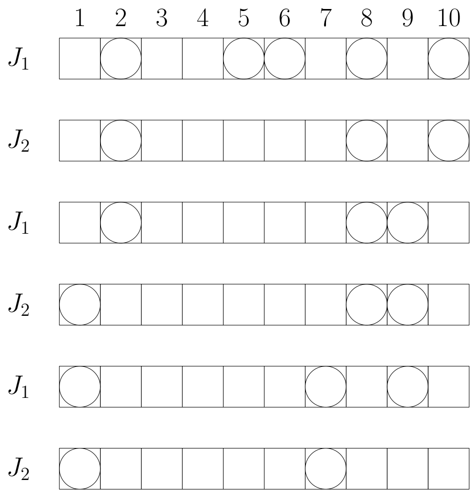
FIGURE 2 – Le jeu $*1 + *3 + *5 + *7$.

3 Exercice 3 :

On considère le jeu suivant :

— le plateau est une bande finie de n cases, numérotées $1, \ldots, n$;
— sur certaines (au moins une) de ces cases se trouvent des pierres ;
— à tour de rôle, chaque joueur peut :
  — soit déplacer une pierre d'une case vers la gauche, si cette case est libre ;
  — soit éliminer une pierre quelconque ;
  — soit éliminer deux pierres adjacentes.

Le premier joueur qui ne peut pas jouer perd (ce qui revient à dire que le joueur qui prend la dernière pierre gagne). On a représenté ci-dessous le début d'une partie, en indiquant à côté de chaque position le joueur qui doit jouer le prochain coup.



1. Si cette partie est continuée avec un jeu parfait des deux joueurs, lequel l'emporte ?
2. En considérant le nombre a de pierres situées sur des cases d'indice pair et le nombre b de pierres situées sur des cases d'indice impair, montrer que J_2 a une stratégie gagnante ssi a et b sont tous les deux pairs.

4 Exercice 4 :

Dans le jeu de Nim, il y a k tas de $n_0, \dots, n_{k-1}$ jetons chacun entre les deux joueurs. Chacun son tour, un joueur choisit un tas, et en retire autant de jetons qu'il le souhaite (au moins un !). Le joueur qui prend le dernier jeton gagne.

On va noter $N_{n_1+n_2+\ldots+n_k}$ le jeu correspondant. Pour pouvoir calculer la valeur des positions, d'un tel jeu, il nous faut considérer l'opérateur XOR bit à bit. On note cet opérateur $\oplus$. On définit $x \oplus y$ comme l'entier dont la représentation binaire est telle que chaque bit est le XOR des bits en même position de la représentation binaire de x et y. On notera $\bar{x}^b$ pour préciser que x est écrit en base b. Sans précision, on le considèrera comme écrit en décimal.

Ainsi, $\overline{10001}^2 \oplus \overline{111}^2 = \overline{10110}^2$.

1. Calculer $14 \oplus 5$.
2. Que vaut $x \oplus x$?

   Soit $J = N_{n_1+\ldots+n_k}$ et, soit $x = (x_1, \dots, x_k)$ une position d'un tel jeu.

3. On suppose que $x = x_1 \oplus \ldots \oplus x_k \neq 0_k$ et on considère d le plus grand indice de poids fort non nul de x.
   (a) Justifier qu'il existe un indice i dans $\{1, \dots, k\}$ tel que le bit d'indice d de x_i est non-nul.
   (b) Justifier que $x \oplus x_i < x_i$.
   (c) En déduire qu'il existe une position $y = (y_1, \dots, y_k)$ dans J accessible à partir de x telle que $y_1 \oplus \ldots \oplus y_k = 0_k$.
4. Montrer que si $x = x_1 \oplus \ldots \oplus x_k = 0_k$ alors quelle que soit la position $y = (y_1, \dots, y_k)$ dans J accessible à partir de x, on aura $y_1 \oplus \ldots \oplus y_k \neq 0_k$.
5. En déduire que les $\mathcal{P}$-positions de J sont les x tels que $x_1 \oplus \ldots \oplus x_k = 0_k$.