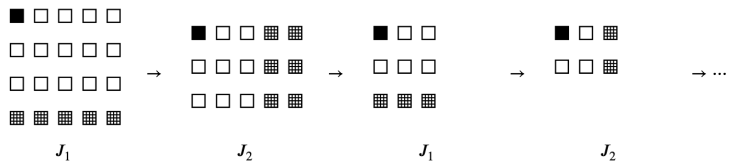
Exercice 2 Jeu de Chomp (type A)

On considère une variante du jeu de Chomp : deux joueurs J_1 et J_2 s'affrontent autour d'une tablette de chocolat de taille $l \times c$, dont le carré en haut à gauche est empoisonné. Les joueurs choisissent chacun leur tour une ou plusieurs lignes (ou une ou plusieurs colonnes) partant du bas (respectivement de la droite) et mangent les carrés correspondants. Il est interdit de manger le carré empoisonné et le perdant est le joueur qui ne peut plus jouer.

Dans la figure ci-dessous, matérialisant un début de partie sur une tablette de taille 4×5, le carré noir est le carré empoisonné, le choix du joueur J_i est d'abord matérialisé par des carrés hachurés, qui sont ensuite supprimés.



On associe à ce jeu un graphe orienté $G = (S, A)$. Les sommets S sont les états possibles de la tablette de chocolat, définis par un couple $s = (m, n), m \in [\![1, l]\!],\ n \in [\![1, c]\!]$. De plus, $(s_i, s_j) \in A$ si un des joueurs peut, par son choix de jeu, faire passer la tablette de l'état s_i à l'état s_j. On dit que s_j est un successeur de s_i et que s_i est un prédécesseur de s_j.

1. Dessiner le graphe G pour $l = 2$ et $c = 3$. Les états de G pourront être représentés par des dessins de tablettes plutôt que par des couples (m, n).

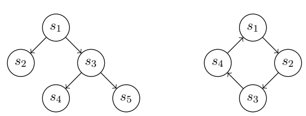
On va chercher à obtenir une stratégie gagnante pour le joueur J_1 par deux manières.

Utilisation des noyaux de graphe

Soit $G = (S, A)$ un graphe orienté. On dit que $N \subset S$ est un noyau de G si :

- pour tout sommet $s \in N$, les successeurs de s ne sont pas dans N,
- tout sommet $s \in S \setminus N$ possède au moins un successeur dans N

2. Donner tous les noyaux possibles pour les graphes suivants :



Dans la suite, on ne considère que des graphes acycliques.

3. Montrer que tout graphe acyclique admet un puits, c'est-à-dire un sommet sans successeur.

Dans le cas général, le noyau d'un graphe $G = (S, A)$ est souvent difficile à calculer. Si la dimension du jeu n'est pas trop importante, on peut toutefois le faire en utilisant l'algorithme suivant :

```
1 N = ∅
2 tant que il reste des sommets à traiter
3 |  Chercher un sommet s ∈ S sans successeur
4 |  N = N ⋃ {s}
5 |  Supprimer s de G ainsi que ses prédécesseurs
```


4. Justifier que cet algorithme termine et renvoie un noyau.
5. Démontrer que ce noyau est unique. Conclure que le graphe du jeu de Chomp possède un unique noyau N.
6. Appliquer cet algorithme pour calculer le noyau du jeu de Chomp à 2 lignes et 3 colonnes. Que peut-on dire du sommet (1,1) pour le joueur qui doit jouer ? En déduire à quoi correspondent les éléments du noyau.
7. Montrer que, dans le cas d'un graphe acyclique, tout joueur dont la position initiale n'est pas dans le noyau a une stratégie gagnante. Le joueur J_1 a-t-il une stratégie gagnante pour ce jeu dans le cas $l = 2$ et $c = 3$?

Utilisation des attracteurs

On modélise le jeu par un graphe biparti : pour ce faire, on dédouble les sommets du graphe précédent : un sommet s_i génère donc deux sommets s_i^1 et s_i^2, s_i^j étant le sommet i contrôlé par le joueur J_j. On forme alors deux ensembles de sommets $S_1 = \{s_i^1\}_i$ et $S_2 = \{s_i^2\}_i$, et on construit le graphe de jeu orienté $G = (S, A)$ avec $S = S_1 \bigcup S_2$ et $S_1 \bigcap S_2 = \emptyset$. De plus, $(s_i^1, s_j^2) \in A$ si le joueur 1 peut, par son choix de jeu, faire passer la tablette de l'état s_i^1 à l'état s_j^2. On raisonne de même pour $(s_i^2, s_j^1) \in A$.
On rappelle la définition d'un attracteur : soit F_1 l'ensemble des positions finales gagnantes pour J_1.
On définit alors la suite d'ensembles $(\mathcal{A}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ par récurrence : $\mathcal{A}_0 = F_1$ et

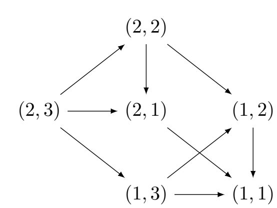
$$(\forall i \in \mathbb{N})\ \mathcal{A}_{i+1} = \mathcal{A}_i \cup \{s \in S_1 / \exists t \in \mathcal{A}_i, (s,t) \in A\} \cup \{s \in S_2 \text{ non terminal}, \forall t \in S, (s,t) \in A \Rightarrow t \in \mathcal{A}_i\}$$

et $\mathcal{A} = \displaystyle\bigcup_{i=0}^{\infty} \mathcal{A}_i$ est l'attracteur pour J_1.

8. Que représente l'ensemble $\mathcal{A}_i$?
9. Dans le cas du jeu de Chomp à deux lignes et trois colonnes (question 1), calculer les ensembles $\mathcal{A}_i$. Le joueur J_1 a-t-il une stratégie gagnante ? Comment le savoir à partir de $\mathcal{A}$?

Proposition de corrigé

1. On obtient le graphe suivant (plus lisible avec des tablettes) :



2. Pour le premier graphe, le noyau est (s_2, s_4, s_5). Pour le second il y a deux noyaux (s_1, s_3) et (s_2, s_4).
3. Soit G un graphe acyclique sans puits. Soit $(s_0 \cdots s_k)$ un chemin dans G. Comme s_k n'est pas un puits, il existe un arc (x_k, y) qui prolonge le chemin précédent. Il y a donc un chemin de longueur arbitraire dans G. Par le principe des tiroirs, tout chemin assez long contient nécessairement deux sommets qui coïncident, on a donc un cycle, en contradiction avec G acyclique. Donc il existe au moins un puits dans G.
4. Supprimer des sommets d'un graphe acyclique le laisse acyclique donc la question 3 assure qu'on trouvera toujours un sommet s convenable en ligne 3. Par conséquent, le nombre de sommets dans G décroît strictement à chaque itération ce qui assure la terminaison de l'algorithme.