1 Simuler un tirage aléatoire

1. On considère un algorithme `biaise` qui renvoie 1 avec une probabilité $p \in]0,1[$ inconnue et 0 sinon. Considérons l'algorithme de Las Vegas suivant : on utilise deux fois consécutives la fonction `biaise`, si on obtient 10 alors on renvoie 0, si on obtient 01, on renvoie 1 et sinon on recommence jusqu'à obtenir l'un ou l'autre des motifs cherchés.
   (a) Justifier que la probabilité que cet algorithme ne s'arrête pas est nulle.
   (b) Quelle est la probabilité de renvoyer 0 ? 1 ?
2. On suppose disposer d'une fonction `pile_ou_face` qui renvoie 0 et 1 avec une probabilité identique qui vaut $1/2$.
   Soit p un réel de $]0,1[$. En exploitant la décomposition de p en base 2, déterminer un algorithme qui renvoie 0 avec probabilité p et 1 avec probabilité $1-p$ en utilisant la fonction `pile_ou_face`.
3. On suppose qu'on dispose d'une fonction `foo()` qui renvoie 0 avec probabilité $\frac{1}{2}$ et 1 aussi avec probabilité $\frac{1}{2}$.
   (a) Décrire une manière de tirer un entier uniformément entre 0 et 3 en utilisant cette fonction.
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Généraliser le résultat précédent pour trouver un nombre entre 0 et $2^n - 1$.
   (c) Donner une méthode pour générer un entier uniformément entre 0 et 5 en utilisant toujours uniquement la fonction `foo`.
   (d) Supposons maintenant qu'on dispose d'une fonction `foo_bis()` qui renvoie uniformément un entier entre 0 et 4. Décrire une méthode pour obtenir uniformément un entier entre 0 et 6 en utilisant uniquement cette dernière fonction.

2 Déduction naturelle

1. Prouver les segments suivants en logique intuitionniste :
   (a) $B \vdash A \to B \vee C$
   (b) $A \to B \to C \vdash (A \wedge B) \to C$
   (c) $(A \wedge B) \to C \vdash A \to B \to C$
   (d) $(A \vee B) \wedge (A \vee C) \vdash A \vee (B \wedge C)$
   (e) $\vdash (((A \wedge B) \to C) \wedge B) \to (A \to C)$
2. Parmis les séquents suivants, trois sont dérivables en logique intuitionniste et un l'est uniquement en logique classique. Identifier lequel en exhibant les preuves adaptées.
   (a) $\neg(A \vee B) \vdash \neg A \wedge \neg B$
   (b) $\neg(A \wedge B) \vdash \neg A \vee \neg B$
   (c) $\neg A \wedge \neg B \vdash \neg(A \vee B)$
   (d) $\neg A \vee \neg B \vdash \neg(A \wedge B)$