Logique et déduction avec quantificateurs

12 et 13 janvier

1 Calcul des prédicats

La logique propositionnelle traite seulement de la relation entre des faits abstraits représentés par les variables propositionnelles. Le calcul des prédicats remplace ces variables propositionnelles par des formules atomiques, elles-mêmes écrites à partir de termes. Autrement dit, les "quantités" qui prendront les valeurs vrai ou faux ne seront pas directement les variables mais des termes composés appelés formules atomiques qui traduiront des réalités plus sophistiquées. Ces termes et ces formules atomiques enrichissent le langage et permettent ainsi d'étudier des théories variées (théorie des groupes, de l'arithmétique, des ensembles).

Puisque termes et formules visent à exprimer des réalités variées, au langage commun de la logique propositionnelle et du calcul des prédicats s'ajouteront, selon le cas, des symboles spécifiques.

1.1 Syntaxe

Éléments de langage communs pour le calcul des prédicats

— les opérateurs logiques propositionnels : $\vee, \wedge, \neg, \rightarrow, \leftrightarrow$,
— un ensemble dénombrable $\mathcal{X}$ de variables,
— les quantificateurs $\forall$ et $\exists$.

Éléments de langage spécifiques Une signature pour le calcul des prédicats comporte :
— un nombre fini de symboles de fonction, chacun d'eux ayant une arité entière positive (les symboles d'arité 0 sont appelés symboles de constantes) ;
— un nombre fini de symboles de relation ou de symboles de prédicats, chacun d'eux ayant une arité entière positive.

Par exemple, une signature pour parler de groupe pourra être décrite avec
— un symbole de constante noté $\mathbb{e}$,
— un symbole de fonction d'arité 2, $\star$ qu'on conviendra de noter de façon infixe,
— un symbole de fonction d'arité 1 qu'on conviendra de noter en exposant après $\cdot^{-1}$.
— un symbole de prédicat d'arité 2, noté $=$.

Par exemple, une signature pour parler d'arithmétique pourra être décrite avec
— deux symboles de constante notés 0 et 1,
— deux symboles de fonction d'arité 2, $+$ et $\times$ qu'on conviendra de noter de façon infixe,
— deux symboles de prédicat d'arité 2, notés $=$ et $<$.

Termes et formules On appelle terme tout arbre construit inductivement à partir des variables (qui sont des feuilles), des symboles de constantes et des symboles de fonction en respectant leur arité. Par exemple, $x \star x^{-1}$ est un terme dans la théorie des groupes et $(x + y) \times (z + 1)$ en est un pour l'arithmétique.

Si r est un symbole de relation d'arité a et si t_1, ..., t_a sont des termes, alors l'arbre donné ici en écriture préfixe $rt_1 \dots t_a$ est une formule atomique. Par exemple $x + 1 < y$ est une formule atomique de l'arithmétique.

On définit les formules comme suit :
— une formule atomique est une formule ;
— si ϕ est une formule et si x est une variable, alors $(\forall x\phi)$ et $(\exists x\phi)$ sont des formules ;
— si ϕ et ψ sont des formules, alors $(\neg\phi)$, $(\phi \wedge \psi)$, $(\phi \vee \psi)$, $(\phi \rightarrow \psi)$ et $(\phi \leftrightarrow \psi)$ sont des formules (non nécessairement atomiques).

Par exemple, $\forall x, (x \star x^{-1} = \mathbb{e})$ est une formule de la théorie des groupes et $\forall x, ((x < 0) \vee (x > 0) \vee (x = 0))$ en est une pour l'arithmétique.

Variable liée, libre ; formule close Dans les formules $\forall x\phi$ et $\exists x\phi$, l'occurrence de la variable x située juste après le quantificateur est liée par celui-ci, tout comme les occurrences de x dans ϕ. Les occurrences d'une variable dans une formule qui ne sont pas ainsi liées sont dites libres. On dit qu'une variable est libre (resp. liée) dans une formule quand elle a au moins une occurrence libre (resp. liée) dans cette formule.

Par exemple, dans la formule $(y \star y = e) \wedge (\forall x(x \star e = x))$, la variable x est liée tandis que la variable y est libre.

Une variable peut être à la fois libre et liée dans une formule : dans la formule $(y \star y = e) \wedge (\forall y(y \star e = y))$, la variable y est libre dans ses deux premières occurrences et liée dans les trois dernières. De telles formules sont maladroites et on évite en général de les considérer.

Une formule est close lorsqu'elle n'a aucune variable libre.

1.2 Sémantique standard

Sémantique informelle des formules closes On considère une signature L pour le calcul des prédicats. Une structure d'interprétation S sur cette signature est la donnée

- d'un ensemble non vide U appelé univers : implicitement, les quantificateurs $\forall$ et $\exists$ porteront sur U ;
- pour chaque symbole de constante c de L, d'un élément c^S de U ;
- pour chaque symbole de fonction f d'arité a de L, d'une fonction mathématique $f^S : U^a \to U$;
- pour chaque symbole de relation r d'arité a de L, d'une relation a-aire sur U : $r^S \subset U^a$, étant entendu qu'un a-uplet vérifie la relation lorsqu'il appartient à r^S.

En outre, le symbole d'égalité $=$, quand il est présent, est toujours interprété comme la relation d'égalité habituelle entre éléments de l'univers.

Une telle structure permet de donner un sens aux termes en appliquant les fonctions mathématiques f^S qui correspondent aux symboles de fonctions qui constituent le terme, aux formules atomiques à l'aide de l'interprétation des prédicats et en utilisant le sens habituel des quantificateurs $\forall$ et $\exists$ ainsi que la sémantique standard de la logique propositionnelle, on peut évaluer toutes les formules.

On dit qu'une structure d'interprétation S est un modèle de la formule close ϕ, et on note $S \vDash \phi$, lorsque ϕ s'interprète dans S comme un énoncé vrai.

Si on considère par exemple la signature e, $\cdot^{-1}$, $\star$ qui a été décrite plus haut. On considère Gr la conjonction des formules suivantes :

- $\forall x \forall y \forall z((x \star y) \star z = x \star (y \star z))$
- $\forall x((x \star e = x) \wedge (e \star x = x))$
- $\forall x((x \star x^{-1} = e) \wedge (x^{-1} \star x = e))$.

Les structures d'interprétation qui sont des modèles de Gr sont les groupes.

Pour deux formules closes ϕ et ψ sur la même signature L, on dit que ψ est une conséquence sémantique de ϕ, et on note $\phi \vDash \psi$, lorsque tout modèle de ϕ est un modèle de ψ.

Par exemple, en reprenant les notations de la question précédente, on a $Gr \vDash \forall x \left(\left(x^{-1}\right)^{-1} = x \right)$ et on n'a pas $Gr \vDash \forall x \forall y (x \star y = y \star x)$.

Sémantique informelle des formules non closes Il est nécessaire de donner également une sémantique pour les formules non closes. On appelle valuation pour la structure d'interprétation S (dont on note l'univers U) toute fonction $\sigma : \mathcal{X}_{\text{libre}} \to U$. On étend inductivement σ à l'ensemble des termes à l'aide de l'interprétation que donne S des symboles de fonctions, puis à l'ensemble des formules atomiques avec l'interprétation des prédicats et enfin à l'ensemble des formules.

Par exemple, on peut considérer la formule $\forall x(x + 1 = y)$ dans l'arithmétique avec l'interprétation standart dans $\mathbb{N}$. Cette formule admet une variable libre y et pour déterminer si elle est vraie ou non, il faut ajouter à l'interprétation une valeur dans $\mathbb{N}$ à y. Quelle que soit la valeur de y que l'on pourra choisir, on remarque que la formule sera évaluée à faux.

2 Déduction naturelle pour le calcul des prédicats

2.1 Précautions à prendre

Aux règles d'inférence de la logique propositionnelle, on va ajouter des règles qui permettent de manipuler les éléments de langage commun du calcul des prédicats. Lors de l'introduction d'un quantificateur, une variable libre devient liée, et inversement lors de l'élimination. Il faut prendre des précautions et restreindre l'application des nouvelles règles pour éviter que ce phénomène de capture/libération de variable n'intervienne d'une façon qui ne serait pas correcte pour la sémantique standard.

Dans toute la suite, ϕ, ψ désignent des formules, Γ un ensemble de formules, s, t des termes, x, y des variables.

On note $\mathrm{FV}(\phi)$ l'ensemble des variables libres (free variables) de la formule ϕ. On étend cette notation à un ensemble de formules : $\mathrm{FV}(\Gamma) = \bigcup_{\phi\in\Gamma} \mathrm{FV}(\phi)$. Par abus, on note encore $\mathrm{FV}(t)$ l'ensemble des variables du terme t, même si la précision qu'elles sont libres est superflue puisqu'un terme ne peut comporter de quantificateur.

On note $\mathrm{BV}(\phi)$ l'ensemble des variables liées (bounded variables) de ϕ. On peut avoir $\mathrm{FV}(\phi)\cap\mathrm{BV}(\phi) \neq \emptyset$ même si en pratique on essaye d'éviter cette situation peu claire.

Pour ϕ une formule, x une variable et t un terme, on note $\phi\,[x \mapsto t]$ la formule ϕ dans laquelle toutes les occurrences libres de x ont été remplacées par t.

2.2 Règles

Règles pour le quantificateur universel La règle d'introduction de $\forall$ est appelée règle de généralisation : si on a montré une propriété à propos d'un x sur lequel on n'a fait aucune hypothèse, alors on a montré la propriété pour tout x.

$$\text{(I}\forall\text{)}\,\frac{\Gamma\vdash\phi \qquad x\notin\mathrm{FV}(\Gamma)}{\Gamma\vdash\forall x\phi}.$$

▷ **Question 1.** Montrez que si on néglige la condition $x \notin \mathrm{FV}(\Gamma)$, la règle d'introduction n'est pas correcte vis à vis de la sémantique standard. ◁

La règle d'élimination indique qu'on peut choisir un terme pour la variable quantifiée universellement, à condition que les quantificateurs présents dans ϕ ne lient pas les variables de t :

$$\text{(E}\forall\text{)}\,\frac{\Gamma\vdash\forall x\phi \qquad \mathrm{FV}(t)\cap\mathrm{BV}(\phi)=\emptyset}{\Gamma\vdash\phi\,[x\mapsto t]}.$$

▷ **Question 2.** Montrez que si on supprime la restriction sur les variables, on obtient une règle incorrecte pour la sémantique standard. ◁

▷ **Question 3.** Montrez que si y est une variable qui n'apparait pas dans ϕ, alors $\forall x\phi \vdash \forall y(\phi\,[x\mapsto y])$. ◁

Règles pour le quantificateur existentiel La règle d'introduction utilise un terme témoin : on construit un objet qui vérifie la propriété ; en logique intuitionniste c'est le seul moyen de prouver une existence.

$$\text{(I}\exists\text{)}\,\frac{\Gamma\vdash\phi\,[x\mapsto t]}{\Gamma\vdash\exists x\phi}.$$

La règle d'élimination ressemble à (E$\vee$) : l'objet dont on connait l'existence doit permettre d'aboutir à une conclusion qui ne dépend pas de lui. Le témoin existentiel sur lequel s'appuie la preuve intermédiaire se fait avec une variable fraiche.

$$\text{(E}\exists\text{)}\,\frac{\Gamma\vdash\exists x\phi \qquad \Gamma,\phi\,[x\mapsto y]\vdash\psi \qquad y\notin\mathrm{FV}(\Gamma\cup\{\phi,\psi\})}{\Gamma\vdash\psi}.$$

▷ **Question 4.** Montrez $\exists x(\varphi\vee\psi)\vdash(\exists x\varphi)\vee(\exists x\psi)$ ◁

▷ **Question 5.** Montrez que $\exists t,\forall x, t\leq x\vdash\forall y,\exists z, z\leq y$. ◁

▷ **Question 6.** Montrez que $\neg(\exists x\varphi)\vdash\forall x(\neg\varphi)$ et $\forall x(\neg\varphi)\vdash\neg(\exists x\varphi)$. ◁

Dans la suite, on considère une variable $x\in\mathcal{V}$ de la logique du premier ordre, et on suppose que φ et ψ sont deux formules du premier ordre telles que $x\notin BV(\varphi)$ et $x\notin BV(\psi)$.

▷ **Question 7.** Donner une preuve en déduction naturelle du séquent suivant :

$$\forall x\,(\varphi\to\psi)(\forall x\,\varphi)\to(\forall x\,\psi).$$

◁

▷ **Question 8.** Donner une preuve en déduction naturelle du séquent suivant :

$$\exists x\,(\varphi\to\psi)(\forall x\,\varphi)\to(\exists x\,\psi).$$

◁