Non prouvabilité en logique intuitionniste

January 8, 2026

On considère $\mathcal{F}$ l'ensemble des formules propositionnelles construites sur un ensemble de variables propositionnelles

$$V = \{x_1, \dots, x_n\},$$

à l'aide des connecteurs logiques $\perp$, $\wedge$, $\vee$ et $\to$. On note $\neg A$ la formule propositionnelle $A \to \perp$.

Pour un séquent $\Gamma \vdash A$, on note :

$$\Gamma \vdash_i A \quad (\text{resp. } \Gamma \vdash_c A)$$

si le séquent est prouvable en logique intuitionniste (resp. classique).

La logique intuitionniste est le système dont les règles sont celles rappelées dans l'annexe B en fin de sujet.

La logique classique est composée du même système de règles auquel on ajoute le Tiers exclu :

$$\frac{}{\vdash \phi \vee \neg \phi}$$

Dans cet exercice, on souhaite montrer qu'il existe des séquents prouvables en logique classique mais pas en logique intuitionniste.

On considère la sémantique suivante, dite *sémantique de Heyting*, définie sur $\mathcal{F}$.

On note $\mathcal{O}(\mathbb{R})$ l'ensemble des ouverts de $\mathbb{R}$ et on définit une valuation comme une fonction

$$\mu : V \to \mathcal{O}(\mathbb{R}).$$

On étend la définition de μ à toutes les formules de $\mathcal{F}$ par :

- $\mu(\perp) = \varnothing$;
- $\mu(A \wedge B) = \mu(A) \cap \mu(B)$;
- $\mu(A \vee B) = \mu(A) \cup \mu(B)$;
- $\mu(A \to B) = \overbrace{\left(\mu(A)^c \cup \mu(B)\right)}^{\circ}$,

où X^c désigne le complémentaire de X et $\mathring{X}$ l'intérieur de X.

Pour $\Gamma \subseteq \mathcal{F}$, on pose

$$\mu(\Gamma) = \bigcap_{A \in \Gamma} \mu(A),$$

avec la convention $\mu(\varnothing) = \mathbb{R}$.

Un séquent $\Gamma \vdash A$ est dit *valide* si

$$\mu(\Gamma) \subseteq \mu(A).$$

Une règle d'inférence est dite valide si, lorsque ses prémisses sont valides, alors sa conclusion est valide.

Q1 Quelle sémantique obtient-on si l'on considère des valuations à valeurs dans $\{\varnothing, \mathbb{R}\}$ au lieu de

$\mathcal{O}(\mathbb{R})$?

Q2 Montrer que

$$\vdash_i ((A \vee B) \wedge \neg A) \to B.$$

Q3 Le séquent

$$\vdash ((A \vee B) \wedge \neg A) \to B$$

est-il valide pour la sémantique de Heyting ? Justifier.

Q4 Montrer que

$$\vdash_c (A \to B) \to (\neg A \vee B).$$

Q5 En utilisant la valuation qui pose $\mu(A) = \mathbb{R}^* = \mu(B)$, montrer que le séquent

$$\vdash (A \to B) \to (\neg A \vee B)$$

n'est pas valide pour la sémantique de Heyting.

Q6 Montrer que la règle de déduction ($\to e$) est valide (on pourra utiliser sans le démontrer que l'intérieur de l'intersection de deux ensembles est égale à l'intersection de leurs intérieurs).

Q7 On admet que les autres règles de la logique intuitionniste sont valides. En déduire que la logique intuitionniste est correcte pour la sémantique de Heyting.

Q8 Montrer que la règle du tiers exclu n'est pas valide. Que peut-on en déduire concernant la complétude de la logique intuitionniste pour la sémantique booléenne usuelle ?