Dans tout le sujet, on se donne V un ensemble infini dénombrable de variables.

Rappelons les règles du calcul des séquents :

$$\frac{}{\Gamma, \varphi \vdash \varphi, \Delta}\ (Ax)$$

$$\frac{}{\Gamma, \bot \vdash \Delta}\ (\bot) \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \top, \Delta}\ (\top)$$

$$\frac{\Gamma, \varphi, \psi \vdash \Delta}{\Gamma, \varphi \wedge \psi \vdash \Delta}\ (\wedge \vdash) \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi, \Delta \quad \Gamma \vdash \psi, \Delta}{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi, \Delta}\ (\vdash \wedge)$$

$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \Delta \quad \Gamma, \psi \vdash \Delta}{\Gamma, \varphi \vee \psi \vdash \Delta}\ (\vee \vdash) \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi, \psi, \Delta}{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi, \Delta}\ (\vdash \vee)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi, \Delta \quad \Gamma, \psi \vdash \Delta}{\Gamma, \varphi \to \psi \vdash \Delta}\ (\to \vdash) \qquad \frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi, \Delta}{\Gamma \vdash \varphi \to \psi, \Delta}\ (\vdash \to)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi, \Delta}{\Gamma, \neg\varphi \vdash \Delta}\ (\neg \vdash) \qquad \frac{\Gamma, \varphi \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg\varphi, \Delta}\ (\vdash \neg)$$

1 Correction

Le but de cette section est de montrer que le calcul des séquents est un système de preuve **correct** : si $\Gamma \vdash \Delta$ est prouvable, alors $\Gamma \vDash \Delta$.

On rappelle qu'on dit qu'une règle est **correcte** lorsque : si toutes les prémisses de la règle sont des séquents valides, alors le séquent conclusion de la règle est valide.

1. Pour chaque règle du calcul des séquents, montrer qu'elle est correcte.
2. En déduire que le calcul des séquents est un système de preuve correct.

2 Complétude

Le but de cette partie est de montrer que le calcul des séquents est un système de preuve **complet** (c'est à dire qu'on a la réciproque du résultat précédent) : si $\Gamma \vDash \Delta$, alors $\Gamma \vdash \Delta$ est prouvable.

Pour cela, on va montrer que toutes les règles du calcul des séquents ont une propriété remarquable (que n'ont pas toutes les règles de la déduction naturelle).

Définition 1 (règle inversible) *Une règle d'inférence est dite **inversible** lorsque : si le séquent conclusion de la règle est valide, alors toutes les prémisses de la règle sont des séquents valides.*

Cette notion correspond en fait à la réciproque de la définition de la correction d'une règle.

3. Illustrer avec un exemple que les règles $(\vee_i^g)$ et $(\vee_i^d)$ de la déduction naturelle ne sont pas inversibles.
4. Expliquer pourquoi toutes les règles d'élimination de la déduction naturelle (sauf $(\neg_e)$) ne sont pas inversibles.
5. Montrer que toutes les règles du calcul des séquents sont inversibles.

La conséquence de ce résultat est que si un séquent est prouvable, et que plusieurs règles peuvent être appliquées à ce séquent : on peut choisir n'importe quelle règle à appliquer en premier, et les prémisses seront toujours prouvables !

6. Soit $\Gamma \vdash \Delta$ un séquent tel qu'aucune règle du calcul des séquents ne peut être appliquée.
   (a) Montrer que :

- Γ ne contient que des variables, et éventuellement $\top$;
- Δ ne contient que des variables, et éventuellement $\perp$;
- $\Gamma \cap \Delta = \emptyset$.

(b) En déduire que $\Gamma \vdash \Delta$ n'est pas valide.

7. Soit $\Gamma \vdash \Delta$ un séquent. Soit A un arbre de preuve (pas forcément terminé) dont $\Gamma \vdash \Delta$ est le séquent à la racine.
   (a) Justifier que la hauteur de A est bornée par une valeur dépendant de Γ et Δ que l'on explicitera.
   (b) En déduire que le calcul des séquents est un système de preuve valide.
8. Chercher une preuve de $\vdash p \vee p$ en calcul des séquents.
   En déduire que ce séquent n'est pas valide.
9. Montrer à l'aide du calcul des séquents que $\vdash ((p \to q) \to p) \to q$ n'est pas valide.
   En déduire une valuation ne satisfaisant pas la formule $((p \to q) \to p) \to q$.