

On pourra utiliser le théorème d'Euler suivant : Dans un graphe orienté $G = (V, E)$ d'ordre au moins 2, un cycle eulérien est un cycle qui passe une fois et une seule par chaque arête. G est dit eulérien s'il admet un cycle eulérien. Le théorème d'Euler affirme qu'un graphe G fortement connexe est eulérien si, et seulement si, le degré entrant de chaque sommet est égal à son degré sortant.

Soit Σ un alphabet et $u = u_1 \dots u_n \in \Sigma^*$ un mot non vide. Pour $i > n$, on note u_i la lettre u_i tel que $i \equiv i \bmod n$ et $i' \in \{1, \dots, n\}$.

On appelle facteur circulaire de u un mot $v = v_1 \dots v_p \in \Sigma^*$ tel que $p \leq n$ et il existe $k \in \{0, \dots, n-1\}$ tel que $v_i = u_{i+k}$.

Enfin, pour $k \in \mathbb{N}^*$, on appelle mot de de Bruijn d'ordre k un mot u tel que tous les mots de Σ^k apparaissent une unique fois comme facteur circulaire de u .

Par exemple, $aabb$ est un mot de de Bruijn d'ordre 2 et $aaababbb$ est un mot de de Bruijn d'ordre 3 pour $\Sigma = \{a, b\}$.

Le but de cet exercice est de construire une suite de mots $(b_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ telle que pour tout k , b_k est un mot de de Bruijn d'ordre k . On considère pour la suite un alphabet Σ quelconque.

1. Déterminer la taille de b_k s'il existe.
2. Quel mot peut convenir pour b_1 ?

On propose la construction suivante : Soit $G_k = (V_k, E_k)$ le graphe orienté tel que :

- $V_k = \Sigma^k$ (chaque mot de longueur k est un sommet) ;
- E_k est défini de la façon suivante : il existe une arête (u, v) si, et seulement si, le suffixe de u de longueur $k-1$ est préfixe de v (y compris dans les éventuels cas où $u = v$).

3. Construire G_2 pour $\Sigma = \{0, 1\}$.
4. En utilisant le théorème d'Euler ci-dessus, montrer qu'il existe un cycle dans G_k empruntant une et une seule fois chaque arc.
5. En étiquetant les arêtes judicieusement, en déduire une façon de construire b_{k+1} à partir du graphe G_k .
6. Déterminer un mot de de Bruijn d'ordre 4 sur $\Sigma = \{a, b\}$ et un mot de de Bruijn d'ordre 2 sur $\Sigma = \{a, b, c\}$.
7. (question bonus) Montrer le théorème d'Euler.