1 Résiduels d'un langage

Soit Σ un alphabet fini non vide. Soit $L \subseteq \Sigma^*$, et soit $u \in \Sigma^*$, on pose :

$$u^{-1}L = \{v \in \Sigma^* : uv \in L\}$$

Un tel ensemble est appelé résiduel de L. On souhaite montrer qu'un langage est reconnaissable ssi il possède un nombre fini de résiduels.

1. Soient $u, v \in \Sigma^*$ et $L \subseteq \Sigma^*$, établir une relation entre $(uv)^{-1}L$ et $v^{-1}(u^{-1}L)$. On justifiera cette relation.
2. On fixe ici $\Sigma = \{a, b\}$ et on considère L représenté par l'expression régulière $a(ba + a)^*$.
   Représenter graphiquement un automate qui reconnait L puis donner $a^{-1}L, b^{-1}L$ et $(ab)^{-1}L$.
3. On revient au cas général et on fixe $L \subseteq \Sigma^*$.
   On suppose que l'ensemble des résiduels de L, $R = \{u^{-1}L : u \in \Sigma^*\}$ est fini.
   On pose $\mathcal{A} = (R, i_0, F, \delta)$ un automate déterministe tel que $\forall u^{-1}L \in R, \forall \alpha \in \Sigma, \delta(u^{-1}L, \alpha) = (u\alpha)^{-1}L$.
   (a) Cette construction n'est pas forcément bien définie, justifier qu'elle l'est. Proposer une définition plus propre qui ne poserait pas ce questionnement.
   (b) Déterminer une formule pour la fonction étendue de δ et la prouver.
   (c) Déterminer i_0 et F pour que le langage reconnu par $\mathcal{A}$ soit bien L. Prouver que votre proposition convient.
   (d) Représenter l'automate obtenu pour le langage de la question précédente.
4. Réciproquement, on se donne un langage L reconnaissable et $\mathcal{A} = (Q, q_0, F, \delta)$ un automate déterministe complet le reconnaissant. Pour $q \in Q$, on pose L_q le langage reconnu par (Q, q, F, δ).
   (a) Soit $u \in \Sigma^*$, établir un lien entre $u^{-1}L$ et $L_{\delta^*(q_0,u)}$.
   (b) Démontrer que L n'a qu'un nombre fini de résiduels.

2 Langages continuables et mots primitifs

On fixe un alphabet Σ de taille au moins 2. Dans le sujet, on considérera des automates sur Σ qui seront toujours finis, déterministes et complets.

Soit $u \in \Sigma^+$. u est dit primitif s'il n'existe pas de mot $v \in \Sigma^*$ et d'entier $p > 1$ tel que $u = v^p$.

Un langage reconnaissable L est dit continuable si et seulement si :

$$\forall u \in \Sigma^*, \exists v \in \Sigma^*, uv \in L$$

1. Le mot *abaaabaa* est-il primitif ? Le mot *ababbaabbbababbab* (de longueur 17) est-il primitif ?
2. Proposer un algorithme naif qui, étant donné un mot, détermine s'il est primitif. Préciser la complexité en temps et en espace.
3. Donner un exemple de langage reconnaissable infini qui ne contient aucun mot primitif.
4. Donner un exemple de langage reconnaissable infini qui ne contient que des mots primitifs.
5. Donner un exemple de langage reconnaible infini qui n'est pas continuable. Existe-t-il des langages continuables et reconnaissables infinis dont le complémentaire est infini.
6. Etatnt donné un automate A, proposer un algorithme qui détermine si $L(A)$ est continuable. Justifier sa correction et préciser la complexité en espace et en temps.
7. Montrer qu 'un langage reconnaissable et continuable contient une infinité de mots primitifs.
8. La réciproque est-elle vraie ?