

DM Calcul des séquents

1. Correction

(Ax)

1. Si σ est un modèle de l'ensemble Γ, φ alors c'est un modèle de φ .

($\perp$) Si σ est un modèle d'un ensemble contenant $\perp$ alors c'est un modèle de n'importe quelle formule.

(T) Toute valuation est un modèle de T.

($\wedge$ $\vdash$) Supposons que $\Gamma, \varphi, \psi \models \Delta$ et soit σ un modèle de l'une des formules de $\Gamma, \varphi \wedge \psi$ alors c'est un modèle de Γ, φ, ψ et donc de Δ par hypothèse.

($\vee$ $\vdash$) Supposons que $\Gamma, \varphi \models \Delta^{(1)}$ et $\Gamma, \psi \models \Delta^{(2)}$ et soit σ un modèle de $\Gamma, \varphi \vee \psi$ alors si $\sigma(\varphi) = \text{vrai}$ on obtient par (1) que σ est modèle d'une des formules de Δ , si $\sigma(\psi) = \text{vrai}$ on obtient le même résultat par (2).

($\rightarrow$ $\vdash$) $\Gamma \models \varphi, \Delta^{(1)}$ et $\Gamma, \psi \models \Delta^{(2)}$

Soit σ modèle de $\Gamma, \varphi \rightarrow \psi$ alors si $\sigma(\varphi) = \text{vrai}$ alors on a $\sigma(\psi) = \text{vrai}$ et donc une formule de

Δ est vraie pour σ par (2) et si $\sigma(\varphi) = \text{faux}$, comme (1) garantit que σ est modèle de φ ou d'une formule de Δ alors il l'est d'une formule de Δ .

($\neg$ $\vdash$) Supposons $\Gamma \models \varphi, \Delta^{(*)}$ et soit σ un modèle de $\Gamma, \neg \varphi$, comme $\sigma(\neg \varphi) = \text{vrai}$ alors σ doit être un modèle d'une formule de Δ car $(*)$ garantit qu'il l'est pour φ ou une formule de Δ .

($\vdash \wedge$) $\Gamma \models \varphi, \Delta^{(1)}$ et $\Gamma \models \psi, \Delta^{(2)}$ soit σ un modèle de Γ alors c'est ~~soit~~ un modèle d'une des formules de Δ ou net de $\varphi \wedge \psi$ pour garantir (1) et (2).

($\vdash \vee$) $\Gamma \models \varphi, \psi, \Delta$ et σ modèle de Γ alors
 σ est modèle de φ ou ψ ou d'une formule de Δ et
 donc elle est bien modèle de $\varphi \vee \psi$ ou d'une formule
 de Δ .

($\vdash \rightarrow$) $\Gamma, \varphi \models \psi, \Delta$ soit σ modèle de Γ
 si $\sigma(\varphi)$ est vrai alors σ modèle de ψ ou de Δ et
 donc σ est modèle de $\varphi \rightarrow \psi$ ou de Δ .
 si $\sigma(\varphi)$ est fausse alors σ est modèle de $\varphi \rightarrow \psi$.
 Ainsi, dans tous les cas, σ est modèle de $\varphi \rightarrow \psi$ ou
 d'une formule de Δ .

($\vdash \neg$) $\Gamma, \varphi \models \Delta$ et soit σ un modèle de Γ .
 si $\sigma(\varphi) = \text{vrai}$ alors σ est un modèle d'une
 formule de Δ
 si $\sigma(\varphi) = \text{faux}$ alors σ modèle de $\neg \varphi$.

2. Si on a un arbre de preuve alors par induct° sur
 cet arbre, le séquent est forcément valide car:
 les feuilles sont des séquents valides
 A chaque embranchement : si les prémisses sont
 des séquents valides alors la conclusion l'est aussi.

on a par exemple $\Gamma = \{q\} \models p \vee q$
 mais $\Gamma = \{q\} \not\models p$

3.
$$\frac{\Gamma \vdash p}{\Gamma \vdash p \vee q} \text{ (Iv)}$$

4.

(E $\wedge$)

$$\frac{\Gamma \vdash p \wedge q}{\Gamma \vdash p}$$

on a par exple

$$\Gamma = \{p\} \models p \text{ mais } \Gamma = \{p\} \not\models p \wedge q$$

(E $\Rightarrow$)

$$\frac{\Gamma \vdash p \Rightarrow q ; \Gamma \vdash p}{\Gamma \vdash q}$$

$\Gamma = \{q\}$ montre
qu'on n'a pas
l'inversibilité

$$(E\vee) \frac{\Gamma \vdash \psi, \Delta, \Gamma, \psi \vdash \psi ; \Gamma, \Delta \vdash \psi}{\Gamma \vdash \psi}$$

$$\Gamma \vdash \psi$$

↳ La formule du cours, elle, est inversible.

On remarque qu'on perd de l'information entre les prémisses et la conclusion dans ce genre de règles.

5. Je me contente de ceux non évidents:

($\rightarrow$ +) Supposons $\Gamma, \psi \rightarrow \psi \models \Delta^{(*)}$ et soit σ modèle de Γ
alors si $\sigma(\psi) = \text{vrai}$ on a bien que σ est un modèle de
 ψ ou d'une formule de Δ et si $\sigma(\psi) = \text{faux}$ alors par
(*) σ est un modèle de $\Gamma, \psi \rightarrow \psi$ et donc d'une des
formules de Δ .

De plus si σ est un modèle de Γ, ψ alors c'est bien
un modèle de $\Gamma, \psi \rightarrow \psi$ et donc d'une formule de Δ .

($\neg$ +) $\Gamma, \neg \psi \models \Delta$ soit σ modèle de Γ :

si $\sigma(\psi) = \text{vrai} \rightarrow \text{ok}$

sinon σ modèle de $\Gamma, \neg \psi$ et donc d'une

formule de Δ .

$(\vdash \rightarrow) \quad \Gamma \models \varphi \Rightarrow \varphi, \Delta$ soit σ modèle de Γ et φ

alors σ est un modèle de $\varphi \Rightarrow \varphi$ ou d'une des formules de Δ et donc on a $\sigma(\varphi) = \text{vrai}$ ou une formule de Δ vraie.

6. (a) Si aucune règle n'est applicable c'est que ni Γ ni Δ ne possède une formule de la forme $\varphi \vee \varphi$; $\varphi \wedge \varphi$; $\varphi \rightarrow \varphi$; $\neg \varphi$.

Ainsi Γ et Δ ne contiennent que des variables, $\perp$ et $\top$.

De plus Γ ne peut contenir $\perp$ et Δ ne peut contenir $\top$.

Comme l'axiome n'est pas applicable on a de plus: $\Gamma \cap \Delta = \emptyset$

(b) On montre que: $\Gamma \not\models \Delta$ en effet si on a ici un modèle σ de Γ alors il n'attribue pas forcément des valeurs de vérité convenables aux variables de Δ . Plus précisément:

Soit $\Gamma = \{x_1, \dots, x_k\}$ et $\Delta = \{x_{k+1}, \dots, x_n\}$

avec éventuellement $\top \in \Gamma$ et $\perp \in \Delta$ (pas important).

alors σ qui met toutes les variables à vrai est ^{sauf celles de Δ} un modèle pour Γ mais pas pour Δ .

$\hookrightarrow$ Ceci n'est un raisonnement convenable que si $\Delta \neq \emptyset$ et $\Delta \neq \{\perp\}$. Dans le premier cas $\Gamma \vdash \Delta$ n'est pas valide par défaut et dans le second non plus car $\emptyset$ et $\{\perp\}$ ne peuvent jamais contenir une formule admettant un quelconque modèle.

7. Soit h_Γ la hauteur de la ~~formule~~ somme des formules de Γ et h_Δ celle des formules de Δ

On remarque si on a $\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma' \vdash \Delta'}$ $\begin{matrix} (\wedge \vdash) & (\vdash \vee) \\ (\neg \vdash) & (\vdash \neg) \\ (\vdash \rightarrow) \end{matrix}$

alors
$$h_{\Gamma'} + h_{\Delta'} = h_{\Gamma} + h_{\Delta} + 1$$

Pour les règles avec deux prémisses:

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1 \quad \Gamma_2 \vdash \Delta_2}{\Gamma \vdash \Delta}$$

$$h_{\Gamma_1} + h_{\Delta_1} + 1 \leq h_{\Gamma} + h_{\Delta} \quad \text{et} \quad h_{\Gamma_2} + h_{\Delta_2} + 1 \leq h_{\Gamma} + h_{\Delta}$$

On remarque donc que la quantité $h_{\Gamma} + h_{\Delta}$ augmente d'au moins 1 à chaque application d'une règle non triviale (augmentation de la valeur pour la conclusion par rapport à celle de chaque prémisses).

Ainsi, si on a un séquent $\Gamma \vdash \Delta$ alors tout arbre de preuve dont c'est la conclusion a une hauteur majorée par $h_{\Gamma} + h_{\Delta}$.

(b) Soit $\Gamma \vdash \Delta$ un séquent supposé valide. Puisque les règles du calcul des séquents sont inversibles alors tout arbre de preuve ~~de~~ ayant $\Gamma \vdash \Delta$ pour racine est alors constitué de séquents valides. (donc toutes les feuilles st des séquents valides).

Un tel arbre sera de hauteur finie et donc soit ses feuilles sont ~~valides~~ toutes des règles sans prémisses et on a bien une preuve de notre séquent, soit au $\ominus$ l'une des feuilles ne l'est pas et alors elle n'a aucune règle qui s'applique : d'après 6 c'est un séquent non valide ce qui contredit ce qui précède

8.

$$\frac{\vdash P, P}{\vdash P \vee P} \vdash \vee$$

on est bloqué : il n'y a pas de preuve et le séquent n'est donc pas valide.

9.

$$\frac{\frac{\frac{?}{P \vdash q, q}}{\vdash P \rightarrow q, q} \quad \frac{?}{P \vdash q}}{\vdash (P \rightarrow q) \rightarrow P \vdash q} \rightarrow \vdash$$

$$\frac{(P \rightarrow q) \rightarrow P \vdash q}{\vdash ((P \rightarrow q) \rightarrow P) \rightarrow q} \rightarrow$$

en prenant $p \rightarrow \text{vrai}$
 $q \rightarrow \text{faux}$
 on devrait donc avoir une évaluation qui rend cette formule fausse.