

Déduction automatique en logique propositionnelle

Éric Détrez : info at eric-detrez dot fr

January 25, 2026

Je remercie les participants du mattermost informatique de l'UPS qui ont eu la patience de m'expliquer mes erreurs et mes incompréhensions.

Je remercie particulièrement Jean Starynkévitch dont la lecture attentive a permis de signaler en les corrigeant de nombreuses erreurs. Dans la lancée de la ré-écriture, il m'a permis d'en repérer d'autres.

La [dernière version du document est téléchargeable](#).

Le code source est disponible sur le [git de l'UPS](#)

Contents

1	Règles de la déduction naturelle	5
1.1	Règles utilisées	5
1.2	Sous-systèmes de preuves	6
2	Règles classiques	8
3	Conjonctions et disjonctions	9
3.1	Premiers résultats	9
1	$p, q \vdash_m p \wedge q$	9
2	$p \wedge q \vdash_m q \wedge p$	9
3	$p \vee q \vdash_m q \vee p$	9
4	$p \vee (p \wedge q) \vdash_m p$	9
5	$p \wedge q, r \wedge s \vdash_m p \wedge s$	9
6	$p, q \wedge r \vdash_m p \wedge q$	9
3.2	Négation	10
7	$\vdash p \vee \neg p$	10
8	$p \vee q, \neg p \vee r \vdash_i q \vee r$	10
9	$p \vee q, \neg q \vdash_i p$	10
10	$p \wedge \neg p \vdash_m \perp$	10
11	$\vdash_m \neg(p \wedge \neg p)$	10
12	$p \vee q, p \vee \neg q \vdash_i p$	11
3.3	Double négation	12
13	$p \vdash_m \neg\neg p$	12
14	$\neg\neg p \vdash p$ avec (RAA)	12
15	$\neg\neg p \vdash p$ avec (TE)	12
16	$\neg\neg\neg p \vdash_m \neg p$	12
17	$\vdash_m \neg\neg(p \vee \neg p)$	12
18	$\neg\neg p, p \vee \neg p \vdash_i p$	12
3.4	Distributivités	13
19	$p \wedge (q \vee r) \vdash_m (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	13
20	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r) \vdash_m p \wedge (q \vee r)$	13
21	$p \vee (q \wedge r) \vdash_m (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	13
22	$(p \vee q) \wedge (p \vee r) \vdash_m p \vee (q \wedge r)$	13
3.5	Lois de de Morgan	14
23	$\neg(p \vee q) \vdash_m \neg p \wedge \neg q$	14

24	$\neg p \wedge \neg q \vdash_m \neg(p \vee q)$	14
25	$\neg(p \wedge q) \vdash \neg p \vee \neg q$ avec (RAA)	14
26	$\neg(p \wedge q) \vdash \neg p \vee \neg q$ avec (TE)	14
27	$\neg p \vee \neg q \vdash_m \neg(p \wedge q)$	14

4 Implications 16

4.1	Création d'une implication	16
28	$q \vdash_m p \rightarrow q$	16
29	$\neg p \vdash_i p \rightarrow q$	16
30	$p \vdash_m q \rightarrow (p \wedge q)$	16
31	$p \wedge q \vdash_m p \rightarrow q$	16
32	$(p \wedge q) \rightarrow r, \neg r \vdash_m p \rightarrow \neg q$	16
4.2	Conséquences d'implication	17
33	$p \rightarrow \neg p \vdash_m \neg p$	17
34	$\neg p \rightarrow p \vdash p$ avec (RAA)	17
35	$\neg p \rightarrow p \vdash p$ avec (TE)	17
36	$p \rightarrow q, p \vee q \vdash_m q$	17
37	$p \rightarrow (q \vee r), \neg q, \neg r \vdash_m \neg p$	17
4.3	Équivalences avec l'implication	18
38	$\neg p \vee q \vdash_i p \rightarrow q$	18
39	$p \rightarrow q \vdash \neg p \vee q$ avec (RAA)	18
40	$p \rightarrow q \vdash \neg p \vee q$ avec (TE)	18
41	$\neg(p \wedge \neg q) \vdash p \rightarrow q$ avec (RAA)	18
42	$\neg(p \wedge \neg q) \vdash p \rightarrow q$ avec (TE)	18
43	$p \rightarrow q \vdash_m \neg(p \wedge \neg q)$	19
44	$p \rightarrow q, \neg q \vdash_m \neg p$	19
45	$\neg q \rightarrow \neg p \vdash p \rightarrow q$ avec (RAA)	19
46	$\neg q \rightarrow \neg p \vdash p \rightarrow q$ avec (TE)	19
4.4	Négation de l'implication	20
47	$\neg(p \rightarrow q) \vdash p$ avec (RAA)	20
48	$\neg(p \rightarrow q) \vdash p$ avec (TE)	20
49	$\neg(p \rightarrow q) \vdash_m \neg q$	20
50	$\neg(p \rightarrow q) \vdash p \wedge \neg q$	20
51	$p \wedge \neg q \vdash_m \neg(p \rightarrow q)$	20
52	$\neg(p \rightarrow q) \vdash_i q \rightarrow p$	21
4.5	Implication avec disjonction	22
53	$p \rightarrow (q \vee r) \vdash (p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)$ avec (RAA)	22
54	$p \rightarrow (q \vee r) \vdash (p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)$ avec (TE)	22
55	$(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r) \vdash_m p \rightarrow (q \vee r)$	22
56	$(p \vee q) \rightarrow r \vdash_m (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$	23
57	$p \rightarrow r, q \rightarrow r \vdash_m (p \vee q) \rightarrow r$	23
4.6	Implication avec conjonction	24
58	$p \rightarrow (q \wedge r) \vdash_m (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$	24
59	$(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r) \vdash_m p \rightarrow (q \wedge r)$	24
60	$(p \wedge q) \rightarrow r \vdash (p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)$ avec (RAA)	24
61	$(p \wedge q) \rightarrow r \vdash (p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)$ avec (TE)	25
62	$(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r) \vdash_m (p \wedge q) \rightarrow r$	25
63	$(p \wedge q) \rightarrow r \vdash_m p \rightarrow (q \rightarrow r)$	25
64	$p \rightarrow (q \rightarrow r) \vdash_m (p \wedge q) \rightarrow r$	25
65	$(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r) \vdash_m p \rightarrow (q \rightarrow r)$	25
66	$p \rightarrow (q \rightarrow r) \vdash (p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)$ avec (RAA)	26
67	$p \rightarrow (q \rightarrow r) \vdash (p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)$ avec (TE)	26
4.7	Deux implications	27
68	$p \rightarrow q, q \rightarrow r \vdash_m p \rightarrow r$	27
69	$p \rightarrow (q \vee r), q \rightarrow s, r \rightarrow s \vdash_m p \rightarrow s$	27
70	$p \rightarrow q, r \rightarrow s \vdash_m (p \wedge r) \rightarrow (q \wedge s)$	27

71	$p \rightarrow q, r \rightarrow s \vdash_m (p \vee r) \rightarrow (q \vee s)$	27
72	$p \rightarrow q, p \rightarrow \neg q \vdash_m \neg p$	27
73	$p \rightarrow q, \neg p \rightarrow r \vdash \neg r \rightarrow q$ avec (RAA)	28
74	$p \rightarrow q, \neg p \rightarrow r \vdash \neg r \rightarrow q$ avec (TE)	28
75	$p \rightarrow (q \vee r), q \rightarrow s, r \rightarrow s \vdash_m p \rightarrow s$	28
4.8	Compositions d'implications	29
76	$p \rightarrow (q \rightarrow r) \vdash_m q \rightarrow (p \rightarrow r)$	29
77	$p \vdash_m (p \rightarrow q) \rightarrow q$	29
78	$(p \rightarrow q) \rightarrow p \vdash p$ avec (RAA)	29
79	$(p \rightarrow q) \rightarrow p \vdash p$ avec (TE)	29
80	$p \rightarrow (q \rightarrow r), p, \neg r \vdash_m \neg q$	29
81	$p \rightarrow (q \rightarrow r), p \rightarrow q, p \vdash_m r$	30
82	$p \rightarrow (p \rightarrow q), p \vdash_m q$	30
83	$p \rightarrow (p \rightarrow q), (p \rightarrow q) \rightarrow p \vdash_m q$	30
4.9	Transformations	31
84	$p \rightarrow q \vdash_m p \rightarrow (p \wedge q)$	31
85	$p \rightarrow r \vdash_m (p \wedge q) \rightarrow r$	31
86	$p \rightarrow q \vdash_m (p \wedge r) \rightarrow (q \wedge r)$	31
87	$p \rightarrow q \vdash_m (p \vee r) \rightarrow (q \vee r)$	31
88	$q \rightarrow r \vdash_m (p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)$	31
89	$(p \wedge r) \rightarrow (q \wedge r), r \vdash_m p \rightarrow q$	31
90	$(p \vee r) \rightarrow (q \vee r), \neg r \vdash_i p \rightarrow q$	32

Quelques Remarques

- Ceci est un ensemble d'exercices destiné à s'exercer sur l'écriture d'arbres de preuve dans le système de déduction naturelle. Les autres types d'exercices ne sont pas abordés.
- Ce document concerne uniquement la logique propositionnelle.
- Lorsque la démonstration prenait trop de place en largeur, j'ai utilisé une abréviation. Si celle-ci n'est pas indispensable pour ce motif, j'ai préféré laissé les séquents au prix d'une présentation un peu lourde.
- De même, pour des calculs trop longs, certaines déductions sont découpées en étapes
- Il y a enfin quelques longues déductions dans le cas d'une élimination de $\vee$, pour lesquelles la preuve de la seconde branche n'a pas été écrite.
- Beaucoup de résultats sont écrits sous la forme $\varphi \vdash \psi$, ils sont facilement transformables en théorèmes $\vdash \varphi \rightarrow \psi$ en utilisant l'introduction de l'implication.
- Il y a des erreurs dans ce document, n'hésitez pas à me les signaler, je corrigerai celles-ci.

1 Règles de la déduction naturelle

Les règles gèrent des séquent $\Gamma \vdash \varphi$ où Γ est un ensemble de formules propositionnelles, le *contexte*, et φ est une formule propositionnelle ; on dit que Γ *démontre* φ ou que φ se déduit de Γ .

Un règle permet d'inférer un séquent deus un nombre fini de séquents (les prémisses) sous la forme

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \varphi_1 \quad \Gamma_2 \vdash \varphi_2 \quad \dots \quad \Gamma_p \vdash \varphi_p}{\Gamma \vdash \varphi} \text{ R}$$

Un séquent est *prouvable* si on peut l'inférer par une suite de règles en commençant par des règle sans prémisses : ($\top_i$), (HYP), (REF), (TE) ici.

1.1 Règles utilisées

- Le vrai se déduit de tout contexte.

$$\frac{}{\Gamma \vdash \top} \top_i$$

- La règle de monotonie (ou affaiblissement) permet d'ajouter des formules au contexte.

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma, \Delta \vdash \varphi} \text{ MON}$$

- La règle de l'hypothèse permet conclure une de ses formules depuis un contexte.

$$\frac{}{\Gamma, \varphi \vdash \varphi} \text{ HYP}$$

On peut remplacer cette règle par la règle de la réflexivité en complétant par la monotonie.

$$\frac{}{\varphi \vdash \varphi} \text{ REF}$$

- Plusieurs règles gèrent les connecteurs logiques dans la formule prouvée.

	Introduction	Élimination
Négation $\neg$	$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \perp}{\Gamma \vdash \neg \varphi} \neg_i$	$\frac{\Gamma \vdash \varphi \quad \Gamma \vdash \neg \varphi}{\Gamma \vdash \perp} \neg_e$
Conjonction $\wedge$	$\frac{\Gamma \vdash \varphi_1 \quad \Gamma \vdash \varphi_2}{\Gamma \vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2} \wedge_i$	$\frac{\Gamma \vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2}{\Gamma \vdash \varphi_1} \wedge_e \text{ ou } \frac{\Gamma \vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2}{\Gamma \vdash \varphi_2} \wedge_e$
Disjonction $\vee$	$\frac{\Gamma \vdash \varphi_1}{\Gamma \vdash \varphi_1 \vee \varphi_2} \vee_i \text{ ou } \frac{\Gamma \vdash \varphi_2}{\Gamma \vdash \varphi_1 \vee \varphi_2} \vee_i$	$\frac{\Gamma \vdash \varphi_1 \vee \varphi_2 \quad \Gamma, \varphi_1 \vdash \psi \quad \Gamma, \varphi_2 \vdash \psi}{\Gamma \vdash \psi} \vee_e$
Implication $\rightarrow$	$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi} \rightarrow_i$	$\frac{\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi \quad \Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \psi} \rightarrow_e$

- La règle du raisonnement par l'absurde ressemble à l'introduction de la négation.

$$\frac{\Gamma, \neg \varphi \vdash \perp}{\Gamma \vdash \varphi} \text{ RAA}$$

L'ensemble de ces règle forme un système complet : toute tautologie φ , sous la forme $\vdash \varphi$, est prouvable.

1.2 Sous-systèmes de preuves

L'introduction de la négation permet d'inférer $\Gamma \vdash \neg\neg\varphi$ depuis $\Gamma, \neg\varphi \vdash \perp$; RAA gère en fait une élimination de la double négation. Si on s'interdit la règle (RAA) : on est dans le cadre de la logique **minimale**. Les résultats prouvables dans ce cadre seront indiqués avec $\vdash_m$.

C'est le cas de la majorité des preuves de ce document

Les mathématiciens qui refusent les démonstrations par l'absurde, qu'on appelle mathématiciens intuitionnistes, ont souhaité garder la possibilité classique de conclure toute proposition du faux. Cela se traduit par l'introduction d'une règle (raisonnement par l'absurde intuitionniste) d'élimination du faux :

$$\frac{\Gamma \vdash \perp}{\Gamma \vdash \psi} \perp_e$$

Si on n'utilise que les règles de la logique minimale et l'absurde intuitionniste, on est dans le cadre de la logique **intuitionniste**. Les résultats prouvables en se restreignant à ce cadre seront indiqués avec $\vdash_i$.

Voici les démonstrations qui utilisent l'absurde intuitionniste.

Démonstrations intuitionnistes

9	$p \vee q, \neg q \vdash_i p$	10
12	$p \vee q, p \vee \neg q \vdash_i p$	11
18	$\neg\neg p, p \vee \neg p \vdash_i p$	12
29	$\neg p \vdash_i p \rightarrow q$	16
52	$\neg(p \rightarrow q) \vdash_i q \rightarrow p$	21
90	$(p \vee r) \rightarrow (q \vee r), \neg r \vdash_i p \rightarrow q$	32

Les résultats nécessitant (RAA) ont aussi été écrits avec la règle du tiers exclu

$$\frac{}{\Gamma \vdash p \vee \neg p} \text{TE}$$

Dans ce cas, on doit souvent ajouter la règle de l'absurde intuitionniste.

En ajoutant le tiers-exclu au cadre intuitionniste on obtient un système complet.

Voici les démonstrations qui utilisent un système complet

Démonstrations avec (raa) ou (te)

7	$\vdash p \vee \neg p$	10
14	$\neg\neg p \vdash p$ avec (RAA)	12
15	$\neg\neg p \vdash p$ avec (TE)	12
25	$\neg(p \wedge q) \vdash \neg p \vee \neg q$ avec (RAA)	14
26	$\neg(p \wedge q) \vdash \neg p \vee \neg q$ avec (TE)	14
34	$\neg p \rightarrow p \vdash p$ avec (RAA)	17
35	$\neg p \rightarrow p \vdash p$ avec (TE)	17
39	$p \rightarrow q \vdash \neg p \vee q$ avec (RAA)	18
40	$p \rightarrow q \vdash \neg p \vee q$ avec (TE)	18
41	$\neg(p \wedge \neg q) \vdash p \rightarrow q$ avec (RAA)	18
42	$\neg(p \wedge \neg q) \vdash p \rightarrow q$ avec (TE)	18
45	$\neg q \rightarrow \neg p \vdash p \rightarrow q$ avec (RAA)	19
46	$\neg q \rightarrow \neg p \vdash p \rightarrow q$ avec (TE)	19
47	$\neg(p \rightarrow q) \vdash p$ avec (RAA)	20
48	$\neg(p \rightarrow q) \vdash p$ avec (TE)	20
50	$\neg(p \rightarrow q) \vdash p \wedge \neg q$	20
53	$p \rightarrow (q \vee r) \vdash (p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)$ avec (RAA)	22
54	$p \rightarrow (q \vee r) \vdash (p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)$ avec (TE)	22
60	$(p \wedge q) \rightarrow r \vdash (p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)$ avec (RAA)	24
61	$(p \wedge q) \rightarrow r \vdash (p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)$ avec (TE)	25
66	$p \rightarrow (q \rightarrow r) \vdash (p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)$ avec (RAA)	26

67	$p \rightarrow (q \rightarrow r) \vdash (p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)$ avec (TE)	26
73	$p \rightarrow q, \neg p \rightarrow r \vdash \neg r \rightarrow q$ avec (RAA)	28
74	$p \rightarrow q, \neg p \rightarrow r \vdash \neg r \rightarrow q$ avec (TE)	28
78	$(p \rightarrow q) \rightarrow p \vdash p$ avec (RAA)	29
79	$(p \rightarrow q) \rightarrow p \vdash p$ avec (TE)	29

2 Règles classiques

Certaines déductions correspondent à des raisonnements classiques et avaient un nom, parfois en latin.

- Le **modus ponens** était le nom de la règle d'élimination de l'implication, sous forme simplifiée,

$$\frac{\frac{}{\vdash p \rightarrow q} \text{HYP} \quad \frac{}{\vdash p} \text{HYP}}{\vdash q} \rightarrow_e$$

- Le nom de la règle du raisonnement par l'absurde, RAA, provient du latin **reduction ad absurdum**.
- La règle du raisonnement par l'absurde intuitionniste était nommée *ex falso quod libet sequitur*,

$$\text{Elle se prouve dans le cadre classique : } \frac{\frac{\Gamma \vdash \perp}{\Gamma, \neg\psi \vdash \perp} \text{MON}}{\Gamma \vdash \psi} \text{RAA}$$

Ainsi tout résultat prouvable dans la logique intuitionniste est prouvable dans la logique classique.

- La règle $p \rightarrow q, \neg q \vdash_m \neg p$ était appelée **modus tollens**. Elle est démontrée à l'exercice 43.
- Le syllogisme classique $p \rightarrow q, q \rightarrow r \vdash_m p \rightarrow r$ est appelé **Barbara**. La preuve est à l'exercice 68.
- Le théorème $\vdash p \vee \neg p$, démontré à l'exercice 7, se généralise en la loi du **tiers exclu** : $\frac{}{\Gamma \vdash p \vee \neg p} \text{TE}$.
- Le théorème $\neg\neg p \vdash p$, démontré à l'exercice 14, se généralise en la loi d'**élimination de la double négation** : $\frac{\Gamma \vdash \neg\neg p}{\Gamma \vdash p} \neg\neg_e$
- La règle $p \vee q, \neg p \vee r \vdash_i q \vee r$ est la **règle de résolution**. Elle est démontrée à l'exercice 8.
- La règle $(p \rightarrow q) \rightarrow p \vdash p$ est la **loi de Pierce**. Elle est démontrée à l'exercice 78.

3 Conjonctions et disjonctions

3.1 Premiers résultats

1 $p, q \vdash_m p \wedge q$

$$\frac{\overline{p, q \vdash p} \text{ HYP} \quad \overline{p, q \vdash q} \text{ HYP}}{p, q \vdash p \wedge q} \wedge_i$$

2 $p \wedge q \vdash_m q \wedge p$

$$\frac{\frac{\overline{p \wedge q \vdash p \wedge q} \text{ HYP}}{p \wedge q \vdash q} \wedge_e \quad \frac{\overline{p \wedge q \vdash p \wedge q} \text{ HYP}}{p \wedge q \vdash p} \wedge_e}{p \wedge q \vdash q \wedge p} \wedge_i$$

3 $p \vee q \vdash_m q \vee p$

$$\frac{\overline{p \vee q \vdash p \vee q} \text{ HYP} \quad \frac{\overline{p \vee q, p \vdash p} \text{ HYP}}{p \vee q, p \vdash q \vee p} \vee_i \quad \frac{\overline{p \vee q, q \vdash q} \text{ HYP}}{p \vee q, q \vdash q \vee p} \vee_i}{p \vee q \vdash q \vee p} \vee_e$$

4 $p \vee (p \wedge q) \vdash_m p$

$$\frac{\overline{p \vee (p \wedge q) \vdash p \vee (p \wedge q)} \text{ HYP} \quad \overline{p \vee (p \wedge q), p \vdash p} \text{ HYP} \quad \frac{\overline{p \vee (p \wedge q), p \wedge q \vdash p \wedge q} \text{ HYP}}{p \vee (p \wedge q), p \wedge q \vdash p} \wedge_e}{p \vee (p \wedge q) \vdash p} \vee_e$$

5 $p \wedge q, r \wedge s \vdash_m p \wedge s$

$$\frac{\frac{\overline{p \wedge q, r \wedge s \vdash p \wedge q} \text{ HYP}}{p \wedge q, r \wedge s \vdash p} \wedge_e \quad \frac{\overline{p \wedge q, r \wedge s \vdash r \wedge s} \text{ HYP}}{p \wedge q, r \wedge s \vdash s} \wedge_e}{p \wedge q, r \wedge s \vdash p \wedge s} \wedge_i$$

6 $p, q \wedge r \vdash_m p \wedge q$

$$\frac{\overline{p, q \wedge r \vdash p} \text{ HYP} \quad \frac{\overline{p, q \wedge r \vdash q \wedge r} \text{ HYP}}{p, q \wedge r \vdash q} \wedge_e}{p, q \wedge r \vdash p \wedge q} \wedge_i$$

3.2 Négation

7 $\vdash p \vee \neg p$

$$\begin{array}{c}
 \frac{\overline{\neg(p \vee \neg p), p \vdash p} \text{ HYP}}{\neg(p \vee \neg p), p \vdash p \vee \neg p} \vee_i \quad \frac{\overline{\neg(p \vee \neg p), p \vdash \neg(p \vee \neg p)} \text{ HYP}}{\neg(p \vee \neg p), p \vdash \neg(p \vee \neg p)} \neg_e \\
 \frac{\neg(p \vee \neg p), p \vdash \perp}{\neg(p \vee \neg p) \vdash \neg p} \neg_i \\
 \frac{\neg(p \vee \neg p) \vdash \neg p}{\neg(p \vee \neg p) \vdash p \vee \neg p} \vee_i \quad \frac{\overline{\neg(p \vee \neg p) \vdash \neg(p \vee \neg p)} \text{ HYP}}{\neg(p \vee \neg p) \vdash \neg(p \vee \neg p)} \neg_e \\
 \frac{\neg(p \vee \neg p) \vdash \perp}{\vdash p \vee \neg p} \text{ RAA}
 \end{array}$$

8 $p \vee q, \neg p \vee r \vdash_i q \vee r$

On note $\Gamma = p \vee q, \neg p \vee r$.

$$\begin{array}{c}
 \frac{\overline{\Gamma, p, \neg p \vdash p} \text{ HYP} \quad \frac{\overline{\Gamma, p, \neg p \vdash \neg p} \text{ HYP}}{\Gamma, p, \neg p \vdash \perp} \neg_e \quad \frac{\overline{\Gamma, p, r \vdash r} \text{ HYP}}{\Gamma, p, r \vdash q \vee r} \vee_i \quad \frac{\overline{\Gamma, q \vdash q} \text{ HYP}}{\Gamma, q \vdash q \vee r} \vee_i}{\Gamma, p \vdash \neg p \vee r} \text{ HYP} \quad \frac{\Gamma, p, \neg p \vdash \perp}{\Gamma, p, \neg p \vdash q \vee r} \perp_e \quad \frac{\Gamma, p, r \vdash q \vee r}{\Gamma, p \vdash q \vee r} \vee_e \quad \frac{\Gamma, q \vdash q \vee r}{\Gamma, q \vdash q \vee r} \vee_i \\
 \hline
 p \vee q, \neg p \vee r \vdash q \vee r
 \end{array}$$

9 $p \vee q, \neg q \vdash_i p$

$$\begin{array}{c}
 \frac{\overline{p \vee q, \neg q \vdash p \vee q} \text{ HYP} \quad \frac{\overline{p \vee q, \neg q, p \vdash p} \text{ HYP}}{p \vee q, \neg q \vdash p} \text{ HYP} \quad \frac{\overline{p \vee q, \neg q, q \vdash q} \text{ HYP} \quad \frac{\overline{p \vee q, \neg q, q \vdash \neg q} \text{ HYP}}{p \vee q, \neg q, q \vdash \perp} \neg_e}{p \vee q, \neg q, q \vdash p} \perp_e \quad \frac{p \vee q, \neg q, q \vdash \perp}{p \vee q, \neg q, q \vdash p} \vee_e \\
 \hline
 p \vee q, \neg q \vdash p
 \end{array}$$

10 $p \wedge \neg p \vdash_m \perp$

$$\begin{array}{c}
 \frac{\overline{p \wedge \neg p \vdash p \wedge \neg p} \text{ HYP}}{p \wedge \neg p \vdash p} \wedge_e \quad \frac{\overline{p \wedge \neg p \vdash p \wedge \neg p} \text{ HYP}}{p, \neg p \vdash \neg p} \wedge_e \\
 \hline
 p, \neg p \vdash \perp
 \end{array}$$

11 $\vdash_m \neg(p \wedge \neg p)$

$$\begin{array}{c}
 \frac{\overline{p \wedge \neg p \vdash p \wedge \neg p} \text{ HYP}}{p \wedge \neg p \vdash p} \wedge_e \quad \frac{\overline{p \wedge \neg p \vdash p \wedge \neg p} \text{ HYP}}{p \wedge \neg p \vdash \neg p} \wedge_e \\
 \hline
 \frac{p \wedge \neg p \vdash \perp}{\vdash \neg(p \wedge \neg p)} \neg_i
 \end{array}$$

12 $p \vee q, p \vee \neg q \vdash_i p$

On note $\Gamma = p \vee q, p \vee \neg q$

$$\begin{array}{c}
 \frac{\overline{\Gamma \vdash p \vee q} \text{ HYP} \quad \overline{\Gamma, p \vdash p} \text{ HYP} \quad \frac{\overline{\Gamma, q \vdash p \vee \neg q} \text{ HYP} \quad \overline{\Gamma, q, p \vdash p} \text{ HYP}}{\Gamma, q \vdash p} \vee_e \quad \frac{\overline{\Gamma, q, \neg q \vdash q} \text{ HYP} \quad \overline{\Gamma, q, \neg q \vdash \neg q} \text{ HYP}}{\Gamma, q, \neg q \vdash \perp} \neg_e \\
 \frac{\Gamma, q, \neg q \vdash \perp}{\Gamma, q, \neg q \vdash p} \perp_e \\
 \frac{\Gamma, q \vdash p \quad \Gamma, q, \neg q \vdash p}{\Gamma, q \vdash p} \vee_e \\
 \frac{\overline{\Gamma \vdash p \vee q} \text{ HYP} \quad \overline{\Gamma, p \vdash p} \text{ HYP} \quad \Gamma, q \vdash p}{p \vee q, p \vee \neg q \vdash p} \vee_e
 \end{array}$$

3.3 Double négation

13 $p \vdash_m \neg\neg p$

$$\frac{\frac{\overline{p, \neg p \vdash p} \text{ HYP} \quad \overline{p, \neg p \vdash \neg p} \text{ HYP}}{\neg_e} \quad \frac{p, \neg p \vdash \perp}{p \vdash \neg\neg p} \neg_i$$

14 $\neg\neg p \vdash p$ avec (raa)

$$\frac{\frac{\overline{\neg\neg p, \neg p \vdash \neg p} \text{ HYP} \quad \overline{\neg\neg p, \neg p \vdash \neg\neg p} \text{ HYP}}{\neg_e} \quad \frac{\neg\neg p, \neg p \vdash \perp}{\neg\neg p \vdash p} \text{ RAA}$$

15 $\neg\neg p \vdash p$ avec (te)

$$\frac{\frac{\overline{\Gamma \vdash p \vee \neg p} \text{ TE} \quad \overline{\Gamma, p \vdash p} \text{ HYP} \quad \frac{\frac{\overline{\Gamma, \neg p \vdash \neg p} \text{ HYP} \quad \frac{\Gamma \vdash \neg\neg p}{\Gamma, \neg p \vdash \neg(\neg p)} \text{ MON}}{\neg_e} \quad \frac{\Gamma, \neg p \vdash \perp}{\Gamma, \neg p \vdash p} \perp_e}{\vee_e} \quad \Gamma \vdash p$$

16 $\neg\neg\neg p \vdash_m \neg p$

$$\frac{\frac{\overline{\neg\neg\neg p, p, \neg p \vdash p} \text{ HYP} \quad \overline{\neg\neg\neg p, p, \neg p \vdash \neg p} \text{ HYP}}{\neg_e} \quad \frac{\neg\neg\neg p, p, \neg p \vdash \perp}{\neg\neg\neg p, p \vdash \neg\neg p} \neg_i \quad \frac{\overline{\neg\neg\neg p, p \vdash \neg\neg\neg p} \text{ HYP}}{\neg_e} \quad \frac{\neg\neg\neg p, p \vdash \perp}{\neg\neg\neg p \vdash \neg p} \neg_i$$

17 $\vdash_m \neg\neg(p \vee \neg p)$

$$\frac{\frac{\overline{\neg(p \vee \neg p), p \vdash p} \text{ HYP} \quad \frac{\neg(p \vee \neg p), p \vdash p \vee \neg p}{\neg(p \vee \neg p), p \vdash \neg(p \vee \neg p)} \vee_i \quad \overline{\neg(p \vee \neg p), p \vdash \neg(p \vee \neg p)} \text{ HYP}}{\neg_e} \quad \frac{\neg(p \vee \neg p), p \vdash \perp}{\neg(p \vee \neg p) \vdash \neg p} \neg_i \quad \frac{\neg(p \vee \neg p) \vdash \neg p}{\neg(p \vee \neg p) \vdash p \vee \neg p} \vee_i \quad \frac{\overline{\neg(p \vee \neg p) \vdash \neg(p \vee \neg p)} \text{ HYP}}{\neg_e} \quad \frac{\neg(p \vee \neg p) \vdash \perp}{\vdash \neg(\neg(p \vee \neg p))} \neg_i$$

18 $\neg\neg p, p \vee \neg p \vdash_i p$

$$\frac{\overline{\neg\neg p, p \vee \neg p \vdash p \vee \neg p} \text{ HYP} \quad \overline{\neg\neg p, p \vee \neg p, p \vdash p} \text{ HYP} \quad \frac{\frac{\overline{\neg\neg p, p \vee \neg p, \neg p \vdash \neg p} \text{ HYP} \quad \overline{\neg\neg p, p \vee \neg p, \neg p \vdash \neg(\neg p)} \text{ HYP}}{\neg_e} \quad \frac{\neg\neg p, p \vee \neg p, \neg p \vdash \perp}{\neg\neg p, p \vee \neg p, \neg p \vdash p} \perp_e}{\vee_e} \quad \neg\neg p, p \vee \neg p \vdash p$$

3.4 Distributivités

On prouve l'équivalence de deux écritures en déduisant chacune de l'autre.

19 $p \wedge (q \vee r) \vdash_m (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

On note $\varphi = p \wedge (q \vee r)$.

$$\frac{\frac{\frac{\varphi \vdash p \wedge (q \vee r)}{\varphi \vdash q \vee r} \text{HYP}}{\varphi \vdash p} \text{HYP} \quad \frac{\frac{\frac{\varphi, q \vdash p \wedge (q \vee r)}{\varphi, q \vdash p} \text{HYP}}{\varphi, q \vdash p \wedge q} \text{HYP} \quad \frac{\frac{\frac{\varphi, q \vdash p \wedge (q \vee r)}{\varphi, q \vdash q} \text{HYP}}{\varphi, q \vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r)} \text{HYP} \quad \frac{\frac{\frac{\varphi, r \vdash p \wedge (q \vee r)}{\varphi, r \vdash p} \text{HYP}}{\varphi, r \vdash p \wedge r} \text{HYP} \quad \frac{\frac{\frac{\varphi, r \vdash p \wedge (q \vee r)}{\varphi, r \vdash r} \text{HYP}}{\varphi, r \vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r)} \text{HYP}}{\varphi \vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r)} \text{HYP}$$

20 $(p \wedge q) \vee (p \wedge r) \vdash_m p \wedge (q \vee r)$

On note $\psi = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$.

Étape 1 On commence par prouver $(p \wedge q) \vee (p \wedge r) \vdash p$.

$$\frac{\frac{\frac{\psi \vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r)}{\psi \vdash p \wedge q} \text{HYP} \quad \frac{\frac{\frac{\psi, p \wedge q \vdash p \wedge q}{\psi, p \wedge q \vdash p} \text{HYP}}{\psi, p \wedge q \vdash p} \text{HYP} \quad \frac{\frac{\frac{\psi, p \wedge r \vdash p \wedge r}{\psi, p \wedge r \vdash p} \text{HYP}}{\psi, p \wedge r \vdash p} \text{HYP}}{\psi \vdash p} \text{HYP}$$

Étape 2 On prouve ensuite $(p \wedge q) \vee (p \wedge r) \vdash q \vee r$.

$$\frac{\frac{\frac{\psi \vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r)}{\psi \vdash p \wedge q} \text{HYP} \quad \frac{\frac{\frac{\psi, p \wedge q \vdash p \wedge q}{\psi, p \wedge q \vdash q} \text{HYP}}{\psi, p \wedge q \vdash q \vee r} \text{HYP} \quad \frac{\frac{\frac{\psi, p \wedge r \vdash p \wedge r}{\psi, p \wedge r \vdash r} \text{HYP}}{\psi, p \wedge r \vdash q \vee r} \text{HYP}}{\psi \vdash q \vee r} \text{HYP}$$

Étape 3 On assemble les deux déductions

$$\frac{\frac{\text{Étape 1}}{(p \wedge q) \vee (p \wedge r) \vdash p} \quad \frac{\text{Étape 2}}{(p \wedge q) \vee (p \wedge r) \vdash q \vee r}}{(p \wedge q) \vee (p \wedge r) \vdash p \wedge (q \vee r)} \text{HYP}$$

21 $p \vee (q \wedge r) \vdash_m (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

$$\frac{\frac{\frac{p \vee (q \wedge r) \vdash p \vee (q \wedge r)}{p \vee (q \wedge r) \vdash p \vee q} \text{HYP} \quad \frac{\frac{\frac{p \vee (q \wedge r), p \vdash p}{p \vee (q \wedge r), p \vdash p \vee q} \text{HYP}}{p \vee (q \wedge r) \vdash p \vee q} \text{HYP} \quad \frac{\frac{\frac{p \vee (q \wedge r), q \wedge r \vdash q \wedge r}{p \vee (q \wedge r), q \wedge r \vdash q} \text{HYP}}{p \vee (q \wedge r), q \wedge r \vdash p \vee r} \text{HYP}}{p \vee (q \wedge r) \vdash p \vee r} \text{HYP}$$

On montre, de la même façon, $p \vee (q \wedge r) \vdash p \vee r$ et on conclut en utilisant la règle $\wedge_i$.

22 $(p \vee q) \wedge (p \vee r) \vdash_m p \vee (q \wedge r)$

On note $\varphi = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ et $\psi = p \vee (q \wedge r)$.

$$\frac{\frac{\frac{\varphi \vdash \varphi}{\varphi \vdash p \vee q} \text{HYP} \quad \frac{\frac{\frac{\varphi, p \vdash p}{\varphi, p \vdash p} \text{HYP}}{\varphi, p \vdash p} \text{HYP} \quad \frac{\frac{\frac{\varphi, q \vdash \varphi}{\varphi, q \vdash p \vee r} \text{HYP}}{\varphi, q \vdash p \vee r} \text{HYP} \quad \frac{\frac{\frac{\varphi, q \vdash \varphi}{\varphi, q \vdash p \vee r} \text{HYP}}{\varphi, q \vdash p \vee r} \text{HYP} \quad \frac{\frac{\frac{\varphi, r \vdash \varphi}{\varphi, r \vdash p \vee r} \text{HYP}}{\varphi, r \vdash p \vee r} \text{HYP}}{\varphi \vdash p \vee (q \wedge r)} \text{HYP}$$

3.5 Lois de de Morgan

23 $\neg(p \vee q) \vdash_m \neg p \wedge \neg q$

$$\frac{\frac{\frac{\overline{\neg(p \vee q), p \vdash \neg(p \vee q)}}{\neg(p \vee q), p \vdash p} \text{HYP} \quad \frac{\overline{\neg(p \vee q), p \vdash p}}{\neg(p \vee q), p \vdash p \vee q} \text{HYP} \quad \vee_i}{\neg(p \vee q), p \vdash p \vee q} \neg_e \quad \frac{\frac{\overline{\neg(p \vee q), q \vdash q}}{\neg(p \vee q), q \vdash p \vee q} \text{HYP} \quad \frac{\overline{\neg(p \vee q), q \vdash p \vee q}}{\neg(p \vee q), q \vdash p \vee q} \text{HYP} \quad \vee_i}{\neg(p \vee q), q \vdash p \vee q} \neg_e$$

24 $\neg p \wedge \neg q \vdash_m \neg(p \vee q)$

On note $\varphi = \neg p \wedge \neg q$ et $\psi = p \vee q$.

$$\frac{\frac{\frac{\frac{\frac{\frac{\frac{\varphi, \psi, p \vdash p}{\varphi, \psi, p \vdash p} \text{HYP}}{\varphi, \psi, p \vdash \perp} \neg_e}{\varphi, \psi \vdash p \vee q} \text{HYP}}{\frac{\frac{\frac{\frac{\frac{\frac{\varphi, \psi, q \vdash q}{\varphi, \psi, q \vdash q} \text{HYP}}{\varphi, \psi, q \vdash \perp} \neg_e}{\varphi, \psi \vdash q \vee \perp} \vee_e}{\frac{\frac{\frac{\frac{\frac{\varphi, \psi, p \vdash \neg p \wedge \neg q}{\varphi, \psi, p \vdash \neg p \wedge \neg q} \text{HYP}}{\varphi, \psi, p \vdash \neg p} \wedge_e}{\frac{\frac{\frac{\frac{\varphi, \psi, q \vdash \neg p \wedge \neg q}{\varphi, \psi, q \vdash \neg p \wedge \neg q} \text{HYP}}{\varphi, \psi, q \vdash \neg q} \wedge_e}{\frac{\frac{\frac{\frac{\neg p \wedge \neg q, p \vee q \vdash \perp}{\neg p \wedge \neg q, p \vee q \vdash \perp} \neg_i}{\neg p \wedge \neg q \vdash \neg(p \vee q)} \neg_e}}}}}}}}}}}}}{\neg p \wedge \neg q \vdash \neg(p \vee q)} \neg_e$$

25 $\neg(p \wedge q) \vdash \neg p \vee \neg q$ avec (raa)

Étape 1 On commence par une preuve de p pour un contexte ; on peut prouver aussi q .

$$\frac{\frac{\overline{\neg(p \wedge q), \neg(\neg p \vee \neg q), \neg p \vdash \neg p}^{\text{HYP}}}{\neg(p \wedge q), \neg(\neg p \vee \neg q), \neg p \vdash \neg p \vee \neg q}^{\vee_i} \quad \frac{\overline{\neg(p \wedge q), \neg(\neg p \vee \neg q), \neg p \vdash \neg(\neg p \vee \neg q)}^{\text{HYP}}}{\neg(p \wedge q), \neg(\neg p \vee \neg q), \neg p \vdash \perp}^{\neg_e}}{\neg(p \wedge q), \neg(\neg p \vee \neg q) \vdash p}^{\text{RAA}}$$

Étape 2 On commence par une preuve de p pour un contexte ; on peut prouver aussi q .

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{c} \text{Étape 1 pour } p \\ \hline \neg(p \wedge q), \neg(\neg p \vee \neg q) \vdash p \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{Étape 1 pour } q \\ \hline \neg(p \wedge q), \neg(\neg p \vee \neg q) \vdash q \end{array} \\
\hline
\begin{array}{c} \neg(p \wedge q), \neg(\neg p \vee \neg q) \vdash p \wedge q \end{array} \wedge_i \quad \begin{array}{c} \hline \neg(p \wedge q), \neg(\neg p \vee \neg q) \vdash \neg(p \wedge q) \end{array} \text{HYP} \\
\hline
\begin{array}{c} \neg(p \wedge q), \neg(\neg p \vee \neg q) \vdash \perp \\ \hline \neg(p \wedge q) \vdash \neg p \vee \neg q \end{array} \neg_e \text{RAA}
\end{array}$$

26 $\neg(p \wedge q) \vdash \neg p \vee \neg q$ avec (te)

$$\frac{\overline{\varphi \vdash p \vee \neg p}^{\text{TE}} \quad \frac{\overline{\varphi, p, q \vdash \neg(p \wedge q)}^{\text{HYP}} \quad \frac{\overline{\varphi, p, q \vdash p}^{\text{HYP}} \quad \overline{\varphi, p, q \vdash q}^{\text{HYP}}}{\varphi, p, q \vdash p \wedge q} \wedge_i}{\varphi, p, q \vdash p \wedge q} \neg_e \quad \frac{\overline{\varphi, p, q \vdash \perp}}{\varphi, p \vdash \neg q} \neg_i \quad \frac{\overline{\varphi, p \vdash \neg q}}{\varphi, p \vdash \neg p \vee \neg q} \vee_i \quad \frac{\overline{\varphi, \neg p \vdash \neg p}^{\text{HYP}}}{\varphi, \neg p \vdash \neg p \vee \neg q} \vee_i}{\neg(p \wedge q) \vdash \neg p \vee \neg q} \vee_e$$

27 $\neg p \vee \neg q \vdash_m \neg(p \wedge q)$

On note $\varphi = \neg p \vee \neg q$ et $\psi = p \wedge q$.

$$\begin{array}{c}
\frac{}{\varphi, \psi \vdash \neg p \vee \neg q} \text{HYP} \quad \frac{\frac{}{\varphi, \psi, \neg p \vdash p \wedge q} \text{HYP}}{\varphi, \psi, \neg p \vdash p} \wedge_e \quad \frac{}{\varphi, \psi, \neg p \vdash \neg p} \text{HYP} \quad \frac{\frac{}{\varphi, \psi, \neg q \vdash p \wedge q} \text{HYP}}{\varphi, \psi, \neg q \vdash q} \wedge_e \quad \frac{}{\varphi, \psi, \neg q \vdash \neg q} \text{HYP} \\
\hline
\varphi, \psi, \neg p \vdash \perp \quad \varphi, \psi, \neg q \vdash \perp \\
\hline
\frac{}{\neg p \vee \neg q, p \wedge q \vdash \perp} \neg_i \quad \frac{}{\varphi, \psi, \neg q \vdash \perp} \vee_e \\
\hline
\neg p \vee \neg q \vdash \neg(p \wedge q)
\end{array}$$

4 Implications

4.1 Création d'une implication

28 $q \vdash_m p \rightarrow q$

$$\frac{\frac{}{q, p \vdash q} \text{HYP}}{q \vdash p \rightarrow q} \rightarrow_i$$

29 $\neg p \vdash_i p \rightarrow q$

$$\frac{\frac{\frac{}{\neg p, p \vdash p} \text{HYP} \quad \frac{}{\neg p, p \vdash \neg p} \text{HYP}}{\neg p, p \vdash \perp} \neg_e \quad \frac{}{\neg p, p \vdash \perp} \perp_e}{\frac{\neg p, p \vdash q}{\neg p \vdash p \rightarrow q} \rightarrow_i} \rightarrow_e$$

30 $p \vdash_m q \rightarrow (p \wedge q)$

$$\frac{\frac{\frac{}{p, q \vdash p} \text{HYP} \quad \frac{}{p, q \vdash q} \text{HYP}}{p, q \vdash p \wedge q} \wedge_i}{p \vdash q \rightarrow (p \wedge q)} \rightarrow_i$$

31 $p \wedge q \vdash_m p \rightarrow q$

$$\frac{\frac{\frac{}{p \wedge q, p \vdash p \wedge q} \text{HYP}}{p \wedge q, p \vdash q} \wedge_e}{p \wedge q \vdash p \rightarrow q} \rightarrow_i$$

32 $(p \wedge q) \rightarrow r, \neg r \vdash_m p \rightarrow \neg q$

On note $\Gamma = (p \wedge q) \rightarrow r, \neg r, p, q$.

$$\frac{\frac{\frac{}{(p \wedge q) \rightarrow r, \neg r, p, q \vdash (p \wedge q) \rightarrow r} \text{HYP} \quad \frac{\frac{\frac{}{\Gamma \vdash p} \text{HYP} \quad \frac{}{\Gamma \vdash q} \text{HYP}}{\Gamma \vdash p \wedge q} \wedge_i}{(p \wedge q) \rightarrow r, \neg r, p, q \vdash p \wedge q} \rightarrow_e}{(p \wedge q) \rightarrow r, \neg r, p, q \vdash r} \rightarrow_e \quad \frac{}{(p \wedge q) \rightarrow r, \neg r, p, q \vdash \neg r} \text{HYP}}{\frac{\frac{}{(p \wedge q) \rightarrow r, \neg r, p, q \vdash \perp} \neg_i}{(p \wedge q) \rightarrow r, \neg r, p \vdash \neg q} \neg_i}{(p \wedge q) \rightarrow r, \neg r \vdash p \rightarrow \neg q} \rightarrow_i} \rightarrow_e$$

4.2 Conséquences d'implication

33 $p \rightarrow \neg p \vdash_m \neg p$

$$\frac{\frac{\frac{}{p \rightarrow \neg p, p \vdash p} \text{HYP} \quad \frac{\frac{}{p \rightarrow \neg p, p \vdash p \rightarrow \neg p} \text{HYP} \quad \frac{}{p \rightarrow \neg p, p \vdash p} \text{HYP}}{p \rightarrow \neg p, p \vdash \neg p} \rightarrow_e}{p \rightarrow \neg p, p \vdash \perp} \neg_e}{p \rightarrow \neg p \vdash \neg p} \neg_i$$

34 $\neg p \rightarrow p \vdash p$ avec (raa)

$$\frac{\frac{\frac{}{\neg p \rightarrow p, \neg p \vdash \neg p \rightarrow p} \text{HYP} \quad \frac{}{\neg p \rightarrow p, \neg p \vdash \neg p} \text{HYP}}{\neg p \rightarrow p, \neg p \vdash p} \rightarrow_e \quad \frac{}{\neg p \rightarrow p, \neg p \vdash \neg p} \text{HYP}}{\neg p \rightarrow p, \neg p \vdash \perp} \neg_e}{p \rightarrow \neg p, \vdash p} \text{RAA}$$

35 $\neg p \rightarrow p \vdash p$ avec (te)

$$\frac{\frac{}{\neg p \rightarrow p \vdash p \vee \neg p} \text{TE} \quad \frac{}{\neg p \rightarrow p, p \vdash p} \text{HYP} \quad \frac{\frac{}{\neg p \rightarrow p, \neg p \vdash \neg p \rightarrow p} \text{HYP} \quad \frac{}{\neg p \rightarrow p, \neg p \vdash \neg p} \text{HYP}}{\neg p \rightarrow p, \neg p \vdash p} \rightarrow_e}{\neg p \rightarrow p \vdash p} \vee_e$$

36 $p \rightarrow q, p \vee q \vdash_m q$

$$\frac{\frac{}{p \rightarrow q, p \vee q \vdash p \vee q} \text{HYP} \quad \frac{\frac{}{p \rightarrow q, p \vee q, p \vdash p \rightarrow q} \text{HYP} \quad \frac{}{p \rightarrow q, p \vee q, p \vdash p} \text{HYP}}{p \rightarrow q, p \vee q, p \vdash q} \rightarrow_e}{p \rightarrow q, p \vee q \vdash q} \vee_e$$

37 $p \rightarrow (q \vee r), \neg q, \neg r \vdash_m \neg p$

On note $\Gamma = p \rightarrow (q \vee r), \neg q, \neg r, p$.

$$\frac{\frac{\frac{}{\Gamma \vdash p \rightarrow (q \vee r)} \text{HYP} \quad \frac{}{\Gamma \vdash p} \text{HYP}}{\Gamma \vdash q \vee r} \rightarrow_e \quad \frac{\frac{}{\Gamma, q \vdash q} \text{HYP} \quad \frac{}{\Gamma, q \vdash \neg q} \text{HYP}}{\Gamma, q \vdash \perp} \rightarrow_e \quad \frac{\frac{}{\Gamma, r \vdash r} \text{HYP} \quad \frac{}{\Gamma, r \vdash \neg r} \text{HYP}}{\Gamma, r \vdash \perp} \rightarrow_e}{p \rightarrow (q \vee r), \neg q, \neg r, p \vdash \perp} \vee_e}{p \rightarrow (q \vee r), \neg q, \neg r \vdash \neg p} \neg_i$$

4.3 Équivalences avec l'implication

Disjonction

On peut combiner les résultats de 28 et 29

38 $\neg p \vee q \vdash_i p \rightarrow q$

$$\frac{\frac{\frac{\overline{\neg p \vee q, \neg p, p \vdash p} \text{ HYP} \quad \overline{\neg p \vee q, \neg p, p \vdash \neg p} \text{ HYP}}{\neg p \vee q, \neg p, p \vdash \perp} \neg_e \quad \frac{\frac{\neg p \vee q, \neg p, p \vdash \perp}{\neg p \vee q, \neg p, p \vdash q} \perp_e}{\neg p \vee q, \neg p \vdash p \rightarrow q} \rightarrow_i \quad \frac{\overline{\neg p \vee q, q, p \vdash q} \text{ HYP}}{\neg p \vee q, q \vdash p \rightarrow q} \rightarrow_i}{\neg p \vee q \vdash p \rightarrow q} \vee_e$$

39 $p \rightarrow q \vdash \neg p \vee q$ avec (raa)

On note $\Gamma = p \rightarrow q, \neg(\neg p \vee q)$

$$\frac{\frac{\frac{\overline{\Gamma, p \vdash p} \text{ HYP} \quad \overline{\Gamma, p \vdash p \rightarrow q} \text{ HYP}}{\Gamma, p \vdash p \rightarrow q} \rightarrow_e \quad \frac{\Gamma, p \vdash p \rightarrow q}{\Gamma, p \vdash \neg p \vee q} \vee_i \quad \frac{\overline{\Gamma, p \vdash \neg(\neg p \vee q)} \text{ HYP}}{\Gamma, p \vdash \neg(\neg p \vee q)} \neg_e}{\frac{\frac{\Gamma, p \vdash \perp}{\Gamma \vdash \neg p} \neg_i \quad \frac{\Gamma \vdash \neg p}{\Gamma \vdash \neg p \vee q} \vee_i \quad \frac{\overline{\Gamma \vdash \neg(\neg p \vee q)} \text{ HYP}}{\Gamma \vdash \neg(\neg p \vee q)} \neg_e}{\frac{p \rightarrow q, \neg(\neg p \vee q) \vdash \perp}{p \rightarrow q \vdash \neg p \vee q} \text{ RAA}}$$

40 $p \rightarrow q \vdash \neg p \vee q$ avec (te)

$$\frac{\frac{\overline{p \rightarrow q, p \vdash p \rightarrow q} \text{ HYP} \quad \overline{p \rightarrow q, p \vdash p} \text{ HYP}}{p \rightarrow q, p \vdash p} \rightarrow_e \quad \frac{p \rightarrow q, p \vdash p}{p \rightarrow q, p \vdash \neg p \vee q} \vee_i \quad \frac{\overline{p \rightarrow q, \neg p \vdash \neg p} \text{ HYP}}{p \rightarrow q, \neg p \vdash \neg p \vee q} \vee_i}{p \rightarrow q \vdash \neg p \vee q} \vee_e$$

Conjonction

41 $\neg(p \wedge \neg q) \vdash p \rightarrow q$ avec (raa)

$$\frac{\frac{\overline{\neg(p \wedge \neg q), p, \neg q \vdash p} \text{ HYP} \quad \overline{\neg(p \wedge \neg q), p, \neg q \vdash \neg q} \text{ HYP}}{\neg(p \wedge \neg q), p, \neg q \vdash p \wedge \neg q} \wedge_i \quad \frac{\overline{\neg(p \wedge \neg q), p, \neg q \vdash \neg(p \wedge \neg q)} \text{ HYP}}{\neg(p \wedge \neg q), p, \neg q \vdash \perp} \neg_e}{\frac{\neg(p \wedge \neg q), p, \neg q \vdash \perp}{\neg(p \wedge \neg q), p \vdash q} \text{ RAA} \quad \frac{\neg(p \wedge \neg q), p \vdash q}{\neg(p \wedge \neg q) \vdash p \rightarrow q} \rightarrow_i}$$

42 $\neg(p \wedge \neg q) \vdash p \rightarrow q$ avec (te)

On note $\varphi = \neg(p \wedge \neg q)$.

4.4 Négation de l'implication

47 $\neg(p \rightarrow q) \vdash p$ avec (raa)

$$\frac{\frac{\frac{\frac{\neg(p \rightarrow q), \neg p, p, \neg q \vdash p}{\neg(p \rightarrow q), \neg p, p, \neg q \vdash \perp} \text{RAA}}{\neg(p \rightarrow q), \neg p, p \vdash q} \rightarrow_i}{\neg(p \rightarrow q), \neg p \vdash p \rightarrow q} \neg_e}{\neg(p \rightarrow q) \vdash p} \text{RAA}$$

48 $\neg(p \rightarrow q) \vdash p$ avec (te)

On note $\Gamma = \neg(p \rightarrow q), \neg p, p$

$$\frac{\frac{\frac{\frac{\frac{\frac{\Gamma \vdash p}{\Gamma \vdash p} \text{HYP}}{\neg(p \rightarrow q), \neg p, p \vdash \perp} \neg_e}{\neg(p \rightarrow q), \neg p, p \vdash q} \perp_e}{\neg(p \rightarrow q), \neg p \vdash p \rightarrow q} \rightarrow_i \quad \frac{\neg(p \rightarrow q), \neg p \vdash \neg(p \rightarrow q)}{\neg(p \rightarrow q), \neg p \vdash p} \text{HYP}}{\neg(p \rightarrow q), \neg p \vdash p} \neg_e \quad \frac{\frac{\neg(p \rightarrow q), \neg p \vdash \perp}{\neg(p \rightarrow q), \neg p \vdash p} \perp_e}{\neg(p \rightarrow q), \neg p \vdash p} \vee_e}{\neg p \rightarrow q \vdash p} \text{TE} \quad \frac{\neg(p \rightarrow q), p \vdash p}{\neg p \rightarrow q \vdash p} \text{HYP}$$

$$49 \quad \neg(p \rightarrow q) \vdash_m \neg q$$

$$\frac{\frac{\overline{\neg(p \rightarrow q), q, p \vdash q}^{\text{HYP}}}{\neg(p \rightarrow q), q \vdash p \rightarrow q} \rightarrow_i \quad \frac{\overline{\neg(p \rightarrow q), q \vdash \neg(p \rightarrow q)}^{\text{HYP}}}{\neg(p \rightarrow q), q \vdash \perp} \neg_e}{\neg(p \rightarrow q) \vdash \neg q} \neg_i$$

50 $\neg(p \rightarrow q) \vdash p \wedge \neg q$

$$\frac{\frac{\text{Exercice 47 ou 48}}{\neg(p \rightarrow q) \vdash p} \quad \frac{\text{Exercice 49}}{\neg(p \rightarrow q) \vdash \neg q}}{\neg(p \rightarrow q) \vdash p \wedge \neg q} \wedge_i$$

$$\mathbf{51} \quad p \wedge \neg q \vdash_m \neg(p \rightarrow q)$$

$$\frac{\frac{\frac{p \wedge \neg q, p \rightarrow q \vdash p \wedge \neg q}{p \wedge \neg q, p \rightarrow q \vdash p} \text{HYP}}{p \wedge \neg q, p \rightarrow q \vdash q} \wedge_e \quad \frac{\frac{p \wedge \neg q, p \rightarrow q \vdash p \rightarrow q}{p \wedge \neg q, p \rightarrow q \vdash q} \text{HYP}}{p \wedge \neg q, p \rightarrow q \vdash q} \rightarrow_e \quad \frac{\frac{\frac{p \wedge \neg q, p \rightarrow q \vdash p \wedge \neg q}{p \wedge \neg q, p \rightarrow q \vdash \neg q} \text{HYP}}{p \wedge \neg q, p \rightarrow q \vdash \neg q} \wedge_e}{p \wedge \neg q, p \rightarrow q \vdash q} \neg_e$$

52 $\neg(p \rightarrow q) \vdash_i q \rightarrow p$

$$\begin{array}{c}
 \frac{}{\neg(p \rightarrow q), q, p \vdash q} \text{HYP} \\
 \frac{}{\neg(p \rightarrow q), q \vdash p \rightarrow q} \rightarrow_i \quad \frac{}{\neg(p \rightarrow q), q \vdash \neg(p \rightarrow q)} \text{HYP} \\
 \hline
 \frac{}{\neg(p \rightarrow q), q \vdash \perp} \perp_e \\
 \frac{}{\neg(p \rightarrow q), q \vdash p} \rightarrow_i \\
 \hline
 \neg(p \rightarrow q) \vdash q \rightarrow p
 \end{array}$$

4.5 Implication avec disjonction

Distributivité de la disjonction à droite

53 $p \rightarrow (q \vee r) \vdash (p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)$ avec (raa)

Étape 1 On commence un résultat plus faible ; on note $\varphi = p \rightarrow (q \vee r)$.

$$\frac{\frac{\frac{\overline{\varphi, p \vdash p} \text{ HYP} \quad \frac{\overline{\varphi, p \vdash p \rightarrow (q \vee r)} \text{ HYP}}{\varphi, p \vdash q \vee r} \rightarrow_e \quad \frac{\frac{\frac{\overline{\varphi, p, q \vdash q} \text{ HYP}}{\varphi, q \vdash p \rightarrow q} \rightarrow_i \quad \frac{\overline{\varphi, q \vdash (p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)} \vee_i}{\varphi, p, q \vdash (p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)} \text{ MON} \quad \frac{\frac{\frac{\overline{\varphi, p, r \vdash r} \text{ HYP}}{\varphi, r \vdash p \rightarrow q} \rightarrow_i \quad \frac{\overline{\varphi, r \vdash (p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)} \vee_i}{\varphi, p, r \vdash (p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)} \text{ MON}}{\varphi, p \vdash (p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)} \vee_e}{p \rightarrow (q \vee r), p \vdash (p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)} \text{ MON}$$

Étape 2 On finit en introduisant la négation du résultat souhaité au contexte ci-dessus.

On note $\Gamma = p \rightarrow (q \vee r), \neg((p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r))$.

$$\frac{\frac{\frac{\overline{p \rightarrow (q \vee r), p \vdash (p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)} \text{ Étape 1}}{\Gamma, p \vdash (p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)} \text{ MON} \quad \frac{\overline{\Gamma, p \vdash \neg((p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r))} \text{ HYP}}{\Gamma, p \vdash \perp} \neg_e}{\frac{\frac{\frac{\overline{\Gamma, p \vdash \perp} \text{ MON}}{\Gamma, p, \neg q \vdash \perp} \text{ RAA}}{\Gamma, p \vdash q} \rightarrow_i \quad \frac{\overline{\Gamma \vdash p \rightarrow q} \vee_i}{\Gamma \vdash (p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)} \vee_i \quad \frac{\overline{\Gamma \vdash \neg((p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r))} \text{ HYP}}{\Gamma \vdash \perp} \neg_e}{\frac{\overline{\Gamma \vdash \perp} \text{ RAA}}{p \rightarrow (q \vee r) \vdash (p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)} \text{ RAA}$$

54 $p \rightarrow (q \vee r) \vdash (p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)$ avec (te)

On utilise l'étape 1 ci-dessus.

$$\frac{\frac{\overline{\varphi \vdash p \vee \neg p} \text{ TE} \quad \frac{\frac{\overline{\varphi, \neg p, p \vdash p} \text{ HYP} \quad \frac{\overline{\varphi, \neg p, p \vdash \neg p} \text{ HYP}}{\varphi, \neg p, p \vdash \perp} \neg_e \quad \frac{\overline{\varphi, \neg p, p \vdash \perp} \perp_e}{\varphi, \neg p, p \vdash q} \rightarrow_i}{\varphi, \neg p \vdash p \rightarrow q} \vee_i \quad \frac{\overline{\varphi, \neg p \vdash p \rightarrow q} \vee_i}{\varphi, \neg p \vdash (p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)} \vee_e}{\frac{\frac{\overline{\varphi, p \vdash (p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)} \text{ Étape 1}}{\varphi, p \vdash (p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)} \text{ MON} \quad \frac{\overline{\varphi, \neg p \vdash (p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)} \vee_e}{p \rightarrow (q \vee r) \vdash (p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)} \vee_e$$

55 $(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r) \vdash_m p \rightarrow (q \vee r)$

On note $\varphi = (p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)$.

$$\frac{\frac{\overline{\varphi, p \vdash (p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)} \text{ HYP} \quad \frac{\frac{\overline{\varphi, p, p \rightarrow q \vdash p \rightarrow q} \text{ HYP} \quad \frac{\overline{\varphi, p, p \rightarrow q \vdash p} \text{ HYP}}{\varphi, p, p \rightarrow q \vdash p} \rightarrow_e \quad \frac{\overline{\varphi, p, p \rightarrow q \vdash q} \vee_i}{\varphi, p, p \rightarrow q \vdash q \vee r} \vee_i \quad \frac{\overline{\varphi, p, p \rightarrow r \vdash q \vee r} \text{ Idem}}{\varphi, p, p \rightarrow r \vdash q \vee r} \vee_e}{\frac{\overline{\varphi, p \vdash q \vee r} \rightarrow_i}{(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r) \vdash p \rightarrow (q \vee r)} \rightarrow_i$$

Distributivité de la disjonction à gauche

On remarquera la transformation en conjonction d'implications.

$$56 \quad (p \vee q) \rightarrow r \vdash_m (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$$

On note $\varphi = (p \vee q) \rightarrow r$.

$$\frac{\frac{\overline{\varphi, p \vdash (p \vee q) \rightarrow r} \text{ HYP} \quad \frac{\overline{\varphi, p \vdash p} \text{ HYP} \quad \overline{\varphi, p \vdash p \vee q} \vee_i}{\overline{\varphi, p \vdash p \vee q} \rightarrow_e} \quad \frac{\overline{\varphi, q \vdash (p \vee q) \rightarrow r} \text{ HYP} \quad \frac{\overline{\varphi, q \vdash q} \text{ HYP} \quad \overline{\varphi, q \vdash p \vee q} \vee_i}{\overline{\varphi, q \vdash p \vee q} \rightarrow_e}}{\frac{\frac{\overline{\varphi, p \vdash r} \rightarrow_i}{\overline{\varphi \vdash p \rightarrow r} \rightarrow_i} \quad \frac{\frac{\overline{\varphi, q \vdash r} \rightarrow_i}{\overline{\varphi \vdash q \rightarrow r} \rightarrow_i}}{\overline{(p \vee q) \rightarrow r \vdash (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)} \wedge_i} \rightarrow_e$$

$$57 \quad p \rightarrow r, q \rightarrow r \vdash_m (p \vee q) \rightarrow r$$

On pose $\Gamma = p \rightarrow r, q \rightarrow r, p \vee q$.

$$\frac{\frac{\overline{\Gamma \vdash p \vee q} \text{ HYP} \quad \frac{\overline{\Gamma, p \vdash p \rightarrow r} \text{ HYP} \quad \overline{\Gamma, p \vdash p} \text{ HYP} \rightarrow_e}{\overline{\Gamma, p \vdash r}} \quad \frac{\overline{\Gamma, q \vdash q \rightarrow r} \text{ HYP} \quad \overline{\Gamma, q \vdash q} \text{ HYP} \rightarrow_e}{\overline{\Gamma, q \vdash r}} \vee_e}{\frac{\overline{p \rightarrow r, q \rightarrow r, p \vee q \vdash r} \rightarrow_i}{\overline{p \rightarrow r, q \rightarrow r \vdash (p \vee q) \rightarrow r} \rightarrow_i} \rightarrow_e$$

4.6 Implication avec conjonction

Distributivité de la conjonction à droite

58 $p \rightarrow (q \wedge r) \vdash_m (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$

$$\frac{\frac{\frac{\overline{p \rightarrow (q \wedge r), p \vdash p \rightarrow (q \wedge r)}^{\text{HYP}}}{p \rightarrow (q \wedge r), p \vdash q \wedge r} \wedge_e \quad \frac{\overline{p \rightarrow (q \wedge r), p \vdash p}^{\text{HYP}}}{p \rightarrow (q \wedge r), p \vdash p} \rightarrow_e}{\frac{\frac{\overline{p \rightarrow (q \wedge r), p \vdash q}^{\text{HYP}}}{p \rightarrow (q \wedge r), p \vdash q} \rightarrow_i \quad \frac{\overline{p \rightarrow (q \wedge r), p \vdash r}^{\text{HYP}}}{p \rightarrow (q \wedge r), p \vdash r} \rightarrow_i}{p \rightarrow (q \wedge r) \vdash (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)} \wedge_i$$

59 $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r) \vdash_m p \rightarrow (q \wedge r)$

On note $\Gamma = (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$.

$$\frac{\frac{\frac{\overline{\Gamma, p \vdash p \rightarrow q}^{\text{HYP}}}{(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r), p \vdash q} \rightarrow_e \quad \frac{\frac{\overline{\Gamma, p \vdash p \rightarrow r}^{\text{HYP}}}{(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r), p \vdash r} \rightarrow_e}{\frac{(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r), p \vdash q \wedge r}{p \rightarrow q, p \rightarrow r \vdash p \rightarrow (q \wedge r)} \wedge_i} \rightarrow_i$$

Distributivité de la conjonction à gauche

On remarquera la transformation en disjonction d'implications.

60 $(p \wedge q) \rightarrow r \vdash (p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)$ avec (raa)

Étape 1 On commence un résultat plus faible où on ajoute p dans le contexte.

$$\frac{\frac{\overline{(p \wedge q) \rightarrow r, p, q \vdash (p \wedge q) \rightarrow r}^{\text{HYP}} \quad \frac{\frac{\overline{(p \wedge q) \rightarrow r, p, q \vdash p}^{\text{HYP}}}{(p \wedge q) \rightarrow r, p, q \vdash p \wedge q} \wedge_i}{(p \wedge q) \rightarrow r, p, q \vdash p \wedge q} \rightarrow_e}{\frac{(p \wedge q) \rightarrow r, p, q \vdash r}{(p \wedge q) \rightarrow r, p \vdash q \rightarrow r} \rightarrow_i} \vee_i$$

Étape 2 On ajoute $\neg((p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r))$ dans le contexte.

On note $\Gamma = (p \wedge q) \rightarrow r, \neg((p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r))$.

$$\frac{\frac{\overline{\text{Étape 1}}}{\Gamma, p \vdash (p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)} \text{MON} \quad \frac{\overline{\Gamma, p \vdash \neg((p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r))}^{\text{HYP}}}{\Gamma, p \vdash \neg((p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r))} \neg_e}{\frac{\frac{\overline{\Gamma, p \vdash \perp}}{\Gamma, p, \neg r \vdash \perp} \text{MON} \quad \frac{\overline{\Gamma, p \vdash r}}{\Gamma \vdash p \rightarrow r} \rightarrow_i}{\Gamma \vdash (p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)} \vee_i \quad \frac{\overline{\Gamma \vdash \neg((p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r))}^{\text{HYP}}}{\Gamma \vdash \neg((p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r))} \neg_e}{\frac{(p \wedge q) \rightarrow r, \neg((p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)) \vdash \perp}{(p \wedge q) \rightarrow r \vdash (p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)} \text{RAA}}$$

61 $(p \wedge q) \rightarrow r \vdash (p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)$ avec (te)

On utilise l'étape 1 ci-dessus

$$\begin{array}{c}
 \frac{\frac{\frac{}{(p \wedge q) \rightarrow r, \neg p, p \vdash p} \text{HYP} \quad \frac{\frac{}{(p \wedge q) \rightarrow r, \neg p, p \vdash \neg p} \text{HYP}}{\frac{}{(p \wedge q) \rightarrow r, \neg p, p \vdash \perp} \neg_e} \quad \frac{}{(p \wedge q) \rightarrow r, \neg p, p \vdash r} \perp_e}{\frac{}{(p \wedge q) \rightarrow r, \neg p \vdash p \rightarrow r} \rightarrow_i} \quad \frac{}{(p \wedge q) \rightarrow r, \neg p \vdash (p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)} \vee_i}{\frac{}{(p \wedge q) \rightarrow r \vdash (p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)} \vee_e} \text{Étape 1} \\
 \frac{\frac{}{(p \wedge q) \rightarrow r \vdash p \vee \neg p} \text{TE} \quad \frac{}{(p \wedge q) \rightarrow r, p \vdash (p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)} \text{Étape 1}}{\frac{}{(p \wedge q) \rightarrow r \vdash (p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)} \vee_e}
 \end{array}$$

62 $(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r) \vdash_m (p \wedge q) \rightarrow r$

On note $\Gamma = (p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r), p \wedge q$.

$$\begin{array}{c}
 \frac{\frac{}{\Gamma \vdash (p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)} \text{HYP} \quad \frac{\frac{}{\Gamma, p \rightarrow r \vdash p \rightarrow r} \text{HYP} \quad \frac{\frac{}{\Gamma, p \rightarrow r \vdash p \wedge q} \text{HYP}}{\frac{}{\Gamma, p \rightarrow r \vdash p} \wedge_e} \quad \frac{}{\Gamma, q \rightarrow r \vdash r} \text{Idem}}{\frac{}{\Gamma, p \rightarrow r \vdash r} \rightarrow_e} \quad \frac{}{\Gamma, q \rightarrow r \vdash r} \vee_e}{\frac{}{(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r), p \wedge q \vdash r} \rightarrow_i} \\
 \frac{}{(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r) \vdash (p \wedge q) \rightarrow r} \rightarrow_i
 \end{array}$$

Une autre formule équivalente pour la conjonction à gauche

Les deux formules ci-dessus sont aussi équivalentes à $p \rightarrow (q \rightarrow r)$.

63 $(p \wedge q) \rightarrow r \vdash_m p \rightarrow (q \rightarrow r)$

$$\begin{array}{c}
 \frac{\frac{}{(p \wedge q) \rightarrow r, p, q \vdash (p \wedge q) \rightarrow r} \text{HYP} \quad \frac{\frac{}{(p \wedge q) \rightarrow r, p, q \vdash p} \text{HYP} \quad \frac{\frac{}{(p \wedge q) \rightarrow r, p, q \vdash q} \text{HYP}}{\frac{}{(p \wedge q) \rightarrow r, p, q \vdash p \wedge q} \wedge_i} \quad \frac{}{(p \wedge q) \rightarrow r, p, q \vdash r} \rightarrow_e}{\frac{}{(p \wedge q) \rightarrow r, p \vdash q \rightarrow r} \rightarrow_i} \\
 \frac{}{(p \wedge q) \rightarrow r \vdash p \rightarrow (q \rightarrow r)} \rightarrow_i
 \end{array}$$

64 $p \rightarrow (q \rightarrow r) \vdash_m (p \wedge q) \rightarrow r$

$$\begin{array}{c}
 \frac{\frac{}{p \rightarrow (q \rightarrow r), p \wedge q \vdash p \rightarrow (q \rightarrow r)} \text{HYP} \quad \frac{\frac{}{p \rightarrow (q \rightarrow r), p \wedge q \vdash p \wedge q} \text{HYP}}{\frac{}{p \rightarrow (q \rightarrow r), p \wedge q \vdash p} \wedge_e} \quad \frac{\frac{}{p \rightarrow (q \rightarrow r), p \wedge q \vdash p \wedge q} \text{HYP}}{\frac{}{p \rightarrow (q \rightarrow r), p \wedge q \vdash q} \wedge_e} \quad \frac{}{p \rightarrow (q \rightarrow r), p \wedge q \vdash r} \rightarrow_e}{\frac{}{p \rightarrow (q \rightarrow r), p \wedge q \vdash q \rightarrow r} \rightarrow_e} \\
 \frac{}{p \rightarrow (q \rightarrow r) \vdash (p \wedge q) \rightarrow r} \rightarrow_i
 \end{array}$$

65 $(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r) \vdash_m p \rightarrow (q \rightarrow r)$

On note $\Gamma = (p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r), p, q$.

$$\begin{array}{c}
 \frac{\frac{}{\Gamma \vdash (p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)} \text{HYP} \quad \frac{\frac{}{\Gamma, p \rightarrow r \vdash p \rightarrow r} \text{HYP} \quad \frac{\frac{}{\Gamma, p \rightarrow r \vdash p} \text{HYP}}{\frac{}{\Gamma, p \rightarrow r \vdash p} \rightarrow_e} \quad \frac{}{\Gamma, q \rightarrow r \vdash r} \text{Idem}}{\frac{}{\Gamma, p \rightarrow r \vdash r} \vee_e} \\
 \frac{}{(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r), p, q \vdash r} \rightarrow_i \\
 \frac{}{(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r) \vdash p \rightarrow (q \rightarrow r)} \rightarrow_i
 \end{array}$$

66 $p \rightarrow (q \rightarrow r) \vdash (p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)$ avec **(raa)**

On note $\Gamma = p \rightarrow (q \rightarrow r), \neg((p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r))$.

$$\begin{array}{c}
\frac{}{\Gamma, p \vdash p \rightarrow (q \rightarrow r)} \text{HYP} \quad \frac{}{\Gamma, p \vdash p} \text{HYP} \\
\hline
\frac{}{\Gamma, p \vdash q \rightarrow r} \rightarrow_e \\
\hline
\frac{}{\Gamma, p \vdash (p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)} \vee_i \quad \frac{}{\Gamma, p \vdash \neg((p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r))} \text{HYP} \\
\hline
\frac{}{\Gamma \vdash \perp} \neg_e \\
\hline
\frac{}{\Gamma, p, \neg r \vdash \perp} \text{MON} \\
\hline
\frac{}{\Gamma, p \vdash r} \text{RAA} \\
\hline
\frac{}{\Gamma \vdash p \rightarrow r} \rightarrow_i \\
\hline
\frac{}{\Gamma \vdash (p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)} \vee_i \quad \frac{}{\Gamma \vdash \neg((p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r))} \text{HYP} \\
\hline
\frac{}{p \rightarrow (q \rightarrow r), \neg((p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)) \vdash \perp} \neg_e \\
\hline
\frac{}{p \rightarrow (q \rightarrow r) \vdash (p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)} \text{RAA}
\end{array}$$

67 $p \rightarrow (q \rightarrow r) \vdash (p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)$ avec **(te)**

On note $\varphi = p \rightarrow (q \vee r)$

$$\begin{array}{c}
\frac{}{p \rightarrow (q \rightarrow r) \vdash p \vee \neg p} \text{TE} \quad \frac{}{\varphi, p \vdash p \rightarrow (q \rightarrow r)} \text{HYP} \quad \frac{}{\varphi, p \vdash p} \text{HYP} \\
\hline
\frac{}{p \rightarrow (q \rightarrow r), p \vdash q \rightarrow r} \rightarrow_e \\
\hline
\frac{}{p \rightarrow (q \rightarrow r), p \vdash (p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)} \vee_i \\
\hline
\frac{}{p \rightarrow (q \rightarrow r) \vdash (p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)} \vee_e \\
\hline
\frac{}{\varphi, \neg p, p \vdash p} \text{HYP} \quad \frac{}{\varphi, \neg p, p \vdash \neg p} \text{HYP} \\
\hline
\frac{}{\varphi, \neg p, p \vdash \perp} \neg_e \\
\hline
\frac{}{\varphi, \neg p, p \vdash r} \perp_e \\
\hline
\frac{}{p \rightarrow (q \rightarrow r), \neg p \vdash p \rightarrow r} \rightarrow_i \\
\hline
\frac{}{p \rightarrow (q \rightarrow r), \neg p \vdash (p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)} \vee_i \\
\hline
\frac{}{p \rightarrow (q \rightarrow r) \vdash (p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)} \vee_e
\end{array}$$

4.7 Deux implications

68 $p \rightarrow q, q \rightarrow r \vdash_m p \rightarrow r$

$$\frac{\frac{\overline{p \rightarrow q, q \rightarrow r, p \vdash p} \text{ HYP} \quad \overline{p \rightarrow q, q \rightarrow r, p \vdash p \rightarrow q} \text{ HYP}}{p \rightarrow q, q \rightarrow r, p \vdash q} \rightarrow_e \quad \overline{p \rightarrow q, q \rightarrow r, p \vdash q \rightarrow r} \text{ HYP}}{p \rightarrow q, q \rightarrow r, p \vdash r} \rightarrow_e \rightarrow_i$$

69 $p \rightarrow (q \vee r), q \rightarrow s, r \rightarrow s \vdash_m p \rightarrow s$

On note $\Gamma = p \rightarrow (q \vee r), q \rightarrow s, r \rightarrow s, p$.

$$\frac{\frac{\overline{\Gamma \vdash p \rightarrow (q \vee r)} \text{ HYP} \quad \overline{\Gamma \vdash p} \text{ HYP}}{\Gamma \vdash q \vee r} \rightarrow_e \quad \frac{\overline{\Gamma, q \vdash q \rightarrow s} \text{ HYP} \quad \overline{\Gamma, q \vdash q} \text{ HYP}}{\Gamma, q \vdash s} \rightarrow_e \quad \frac{\overline{\Gamma, r \vdash r \rightarrow s} \text{ HYP} \quad \overline{\Gamma, r \vdash r} \text{ HYP}}{\Gamma, r \vdash s} \rightarrow_e}{\Gamma \vdash s} \vee_e \rightarrow_i$$

70 $p \rightarrow q, r \rightarrow s \vdash_m (p \wedge r) \rightarrow (q \wedge s)$

On note $\Gamma = p \rightarrow q, r \rightarrow s, p \wedge r$.

$$\frac{\frac{\overline{\Gamma \vdash p \rightarrow q} \text{ HYP} \quad \frac{\overline{\Gamma \vdash p \wedge r} \text{ HYP}}{\Gamma \vdash p} \wedge_e}{p \rightarrow q, r \rightarrow s, p \wedge r \vdash q} \rightarrow_e \quad \frac{\overline{\Gamma \vdash r \rightarrow s} \text{ HYP} \quad \frac{\overline{\Gamma \vdash p \wedge r} \text{ HYP}}{\Gamma \vdash r} \wedge_e}{p \rightarrow q, r \rightarrow s, p \wedge r \vdash s} \rightarrow_e}{p \rightarrow q, r \rightarrow s, p \wedge r \vdash q \wedge s} \wedge_i \rightarrow_i$$

71 $p \rightarrow q, r \rightarrow s \vdash_m (p \vee r) \rightarrow (q \vee s)$

On note $\Gamma = p \rightarrow q, r \rightarrow s, p \vee r$.

$$\frac{\overline{p \rightarrow q, r \rightarrow s, p \vee r \vdash p \vee r} \text{ HYP} \quad \frac{\overline{\Gamma, p \vdash p \rightarrow q} \text{ HYP} \quad \overline{\Gamma, p \vdash p} \text{ HYP}}{p \rightarrow q, r \rightarrow s, p \vee r, p \vdash q} \rightarrow_e \quad \frac{\overline{\Gamma, r \vdash r \rightarrow s} \text{ HYP} \quad \overline{\Gamma, r \vdash r} \text{ HYP}}{p \rightarrow q, r \rightarrow s, p \vee r, r \vdash s} \rightarrow_e}{p \rightarrow q, r \rightarrow s, p \vee r, p \vdash q \vee s} \vee_i \rightarrow_i$$

72 $p \rightarrow q, p \rightarrow \neg q \vdash_m \neg p$

$$\frac{\overline{p \rightarrow q, p \rightarrow \neg q, p \vdash p \rightarrow q} \text{ HYP} \quad \overline{p \rightarrow q, p \rightarrow \neg q, p \vdash p} \text{ HYP}}{p \rightarrow q, p \rightarrow \neg q, p \vdash q} \rightarrow_e \quad \frac{\overline{p \rightarrow q, p \rightarrow \neg q, p \vdash p \rightarrow \neg q} \text{ HYP} \quad \overline{p \rightarrow q, p \rightarrow \neg q, p \vdash p} \text{ HYP}}{p \rightarrow q, p \rightarrow \neg q, p \vdash \neg q} \rightarrow_e}{p \rightarrow q, p \rightarrow \neg q, p \vdash \perp} \neg_e \rightarrow_i$$

73 $p \rightarrow q, \neg p \rightarrow r \vdash \neg r \rightarrow q$ avec (raa)

On note $\Gamma = p \rightarrow q, \neg p \rightarrow r, \neg r, \neg q$.

$$\begin{array}{c}
 \frac{}{\Gamma, p \vdash p \rightarrow q} \text{HYP} \quad \frac{}{\Gamma, p \vdash p} \text{HYP} \\
 \hline
 \Gamma, p \vdash q \quad \Gamma, p \vdash \neg q \\
 \hline
 \Gamma, p \vdash \perp \\
 \hline
 \Gamma \vdash \neg p \quad \neg_i \\
 \hline
 \Gamma \vdash \neg p \rightarrow r \quad \text{HYP} \\
 \hline
 p \rightarrow q, \neg p \rightarrow r, \neg r, \neg q \vdash r \quad \rightarrow_e \\
 \hline
 p \rightarrow q, \neg p \rightarrow r, \neg r, \neg q \vdash \neg r \quad \neg_e \\
 \hline
 p \rightarrow q, \neg p \rightarrow r, \neg r, \neg q \vdash \perp \\
 \hline
 p \rightarrow q, \neg p \rightarrow r, \neg r \vdash q \quad \text{RAA} \\
 \hline
 p \rightarrow q, \neg p \rightarrow r \vdash \neg r \rightarrow q \quad \rightarrow_i
 \end{array}$$

74 $p \rightarrow q, \neg p \rightarrow r \vdash \neg r \rightarrow q$ avec (te)

On note $\Gamma = p \rightarrow q, \neg p \rightarrow r, \neg r$.

$$\begin{array}{c}
 \frac{}{\Gamma, \neg p \vdash \neg p} \text{HYP} \quad \frac{}{\Gamma, \neg p \vdash \neg p \rightarrow r} \text{HYP} \\
 \hline
 \Gamma, \neg p \vdash r \quad \rightarrow_e \\
 \hline
 \Gamma, \neg p \vdash \neg r \quad \neg_e \\
 \hline
 \Gamma, \neg p \vdash \perp \\
 \hline
 \Gamma, \neg p \vdash q \quad \perp_e \\
 \hline
 \Gamma, \neg p \vdash q \quad \vee_e \\
 \hline
 \Gamma \vdash p \vee \neg p \quad \text{TE} \\
 \hline
 \Gamma, p \vdash p \quad \text{HYP} \quad \Gamma, p \vdash p \rightarrow q \quad \text{HYP} \\
 \hline
 \Gamma, p \vdash q \quad \rightarrow_e \\
 \hline
 p \rightarrow q, \neg p \rightarrow r, \neg r \vdash q \quad \rightarrow_i \\
 \hline
 p \rightarrow q, \neg p \rightarrow r \vdash \neg r \rightarrow q
 \end{array}$$

75 $p \rightarrow (q \vee r), q \rightarrow s, r \rightarrow s \vdash_m p \rightarrow s$

On note $\Gamma = p \rightarrow (q \vee r), q \rightarrow s, r \rightarrow s, p$.

$$\begin{array}{c}
 \frac{}{\Gamma \vdash p \rightarrow (q \vee r)} \text{HYP} \quad \frac{}{\Gamma \vdash p} \text{HYP} \\
 \hline
 \Gamma \vdash q \vee r \quad \rightarrow_e \\
 \hline
 \Gamma, q \vdash q \rightarrow s \quad \text{HYP} \quad \Gamma, q \vdash q \quad \text{HYP} \\
 \hline
 \Gamma, q \vdash s \quad \rightarrow_e \\
 \hline
 \Gamma, r \vdash r \rightarrow s \quad \text{HYP} \quad \Gamma, r \vdash r \quad \text{HYP} \\
 \hline
 \Gamma, r \vdash s \quad \rightarrow_e \\
 \hline
 \Gamma, r \vdash s \quad \vee_e \\
 \hline
 p \rightarrow (q \rightarrow r), q \rightarrow s, r \rightarrow s, p \vdash s \\
 \hline
 p \rightarrow (q \rightarrow r), q \rightarrow s, r \rightarrow s \vdash p \rightarrow s \quad \rightarrow_i
 \end{array}$$

4.8 Compositions d'implications

Voir $(p \wedge q) \rightarrow r \vdash_m p \rightarrow (q \rightarrow r)$ et sa réciproque aux exercices 63 et suivant.

76 $p \rightarrow (q \rightarrow r) \vdash_m q \rightarrow (p \rightarrow r)$

$$\frac{\frac{\frac{}{p \rightarrow (q \rightarrow r), p, q \vdash p \rightarrow (q \rightarrow r)}{\text{HYP}} \quad \frac{}{p \rightarrow (q \rightarrow r), p, q \vdash p} \text{HYP}}{p \rightarrow (q \rightarrow r), p, q \vdash q \rightarrow r} \rightarrow_e \quad \frac{}{p \rightarrow (q \rightarrow r), p, q \vdash q} \text{HYP}}{p \rightarrow (q \rightarrow r), p, q \vdash r} \rightarrow_e$$

$$\frac{\frac{p \rightarrow (q \rightarrow r), p, q \vdash r}{\rightarrow_i} \quad \frac{p \rightarrow (q \rightarrow r), q \vdash p \rightarrow r}{\rightarrow_i}}{p \rightarrow (q \rightarrow r) \vdash q \rightarrow (p \rightarrow r)} \rightarrow_i$$

77 $p \vdash_m (p \rightarrow q) \rightarrow q$

$$\frac{\frac{}{p, p \rightarrow q \vdash p \rightarrow q} \text{HYP} \quad \frac{}{p, p \rightarrow q \vdash p} \text{HYP}}{p, p \rightarrow q \vdash p} \rightarrow_e$$

$$\frac{p, p \rightarrow q \vdash q}{p \vdash (p \rightarrow q) \rightarrow q} \rightarrow_i$$

78 $(p \rightarrow q) \rightarrow p \vdash p$ avec (raa)

$$\frac{\frac{\frac{}{\varphi, \neg p, p, \neg q \vdash p} \text{HYP} \quad \frac{}{\varphi, \neg p, p, \neg q \vdash \neg p} \text{HYP}}{\varphi, \neg p, p, \neg q \vdash \perp} \neg_e \quad \frac{\varphi, \neg p, p \vdash q}{\varphi, \neg p \vdash p \rightarrow q} \text{RAA}}{\varphi, \neg p \vdash p \rightarrow q} \rightarrow_i$$

$$\frac{\varphi, \neg p \vdash p \rightarrow q \quad \frac{}{\varphi, \neg p \vdash (p \rightarrow q) \rightarrow p} \text{HYP}}{\varphi, \neg p \vdash p} \rightarrow_e$$

$$\frac{\varphi, \neg p \vdash p \quad \frac{}{\varphi, \neg p \vdash \neg p} \text{HYP}}{\frac{(p \rightarrow q) \rightarrow p, \neg p \vdash \perp}{(p \rightarrow q) \rightarrow p \vdash p} \text{RAA}} \neg_e$$

79 $(p \rightarrow q) \rightarrow p \vdash p$ avec (te)

$$\frac{\frac{}{\varphi, \neg p, p \vdash p} \text{HYP} \quad \frac{}{\varphi, \neg p, p \vdash \neg p} \text{HYP}}{\varphi, \neg p, p \vdash \perp} \neg_e$$

$$\frac{\varphi, \neg p, p \vdash \perp}{\varphi, \neg p, p \vdash q} \perp_e$$

$$\frac{\varphi, \neg p, p \vdash q}{\varphi, \neg p \vdash p \rightarrow q} \rightarrow_i$$

$$\frac{\varphi, \neg p \vdash p \rightarrow q \quad \frac{}{\varphi, \neg p \vdash (p \rightarrow q) \rightarrow p} \text{HYP}}{\varphi, \neg p \vdash p} \rightarrow_e$$

$$\frac{\varphi \vdash p \vee \neg p \text{ TE} \quad \frac{}{\varphi, p \vdash p} \text{HYP} \quad \varphi, \neg p \vdash p}{(p \rightarrow q) \rightarrow p \vdash p} \vee_e$$

80 $p \rightarrow (q \rightarrow r), p, \neg r \vdash_m \neg q$

On note $\Gamma = p \rightarrow (q \rightarrow r), p, \neg r, q$.

$$\frac{\frac{}{\Gamma \vdash p \rightarrow (q \rightarrow r)} \text{HYP} \quad \frac{}{\Gamma \vdash p} \text{HYP}}{\Gamma \vdash q \rightarrow r} \rightarrow_e$$

$$\frac{\Gamma \vdash q \rightarrow r \quad \frac{}{p \rightarrow (q \rightarrow r), p, \neg r, q \vdash q} \text{HYP}}{p \rightarrow (q \rightarrow r), p, \neg r, q \vdash r} \rightarrow_e$$

$$\frac{p \rightarrow (q \rightarrow r), p, \neg r, q \vdash r \quad \frac{}{p \rightarrow (q \rightarrow r), p, \neg r, q \vdash \neg r} \text{HYP}}{p \rightarrow (q \rightarrow r), p, \neg r, q \vdash \perp} \neg_e$$

$$\frac{p \rightarrow (q \rightarrow r), p, \neg r, q \vdash \perp}{p \rightarrow (q \rightarrow r), p, \neg r \vdash \neg q} \neg_i$$

81 $p \rightarrow (q \rightarrow r), p \rightarrow q, p \vdash_m r$

On note $\Gamma = p \rightarrow (q \rightarrow r), p \rightarrow q, p$.

$$\frac{\frac{\overline{\Gamma \vdash p \rightarrow (q \rightarrow r)} \text{ HYP} \quad \overline{\Gamma \vdash p} \text{ HYP}}{p \rightarrow (q \rightarrow r), p \rightarrow q, p \vdash q \rightarrow r} \rightarrow_e \quad \frac{\overline{\Gamma \vdash p \rightarrow q} \text{ HYP} \quad \overline{\Gamma \vdash p} \text{ HYP}}{p \rightarrow (q \rightarrow r), p \rightarrow q, p \vdash q} \rightarrow_e}{p \rightarrow (q \rightarrow r), p \rightarrow q, p \vdash r} \rightarrow_e$$

82 $p \rightarrow (p \rightarrow q), p \vdash_m q$

$$\frac{\frac{\overline{p \rightarrow (p \rightarrow q), p \vdash p \rightarrow (p \rightarrow q)} \text{ HYP} \quad \overline{p \rightarrow (p \rightarrow q), p \vdash p} \text{ HYP}}{p \rightarrow (p \rightarrow q), p \vdash p \rightarrow q} \rightarrow_e \quad \overline{p \rightarrow (p \rightarrow q), p \vdash p} \text{ HYP}}{p \rightarrow (p \rightarrow q), p \vdash q} \rightarrow_e$$

83 $p \rightarrow (p \rightarrow q), (p \rightarrow q) \rightarrow p \vdash_m q$

Étape 1 On commence par prouver $p \rightarrow (p \rightarrow q), (p \rightarrow q) \rightarrow p \vdash_m p$.

On note $\Gamma = p \rightarrow (p \rightarrow q), (p \rightarrow q) \rightarrow p$

$$\frac{\overline{p \rightarrow (p \rightarrow q), (p \rightarrow q) \rightarrow p \vdash (p \rightarrow q) \rightarrow p} \text{ HYP} \quad \frac{\frac{\overline{\Gamma, p \vdash p \rightarrow (p \rightarrow q)} \text{ HYP} \quad \overline{\Gamma, p \vdash p} \text{ HYP}}{\Gamma, p \vdash p \rightarrow q} \rightarrow_e \quad \overline{\Gamma, p \vdash p} \text{ HYP}}{\frac{p \rightarrow (p \rightarrow q), (p \rightarrow q) \rightarrow p, p \vdash q}{p \rightarrow (p \rightarrow q), (p \rightarrow q) \rightarrow p \vdash p \rightarrow q} \rightarrow_i} \rightarrow_e$$

On utilise l'étape 1, 2 fois

$$\frac{\frac{\overline{\Gamma \vdash p \rightarrow (p \rightarrow q)} \text{ HYP} \quad \frac{\text{Étape 1}}{\Gamma \vdash p}}{p \rightarrow (p \rightarrow q), (p \rightarrow q) \rightarrow p \vdash p \rightarrow q} \rightarrow_e \quad \frac{\text{Étape 1}}{p \rightarrow (p \rightarrow q), (p \rightarrow q) \rightarrow p \vdash p} \rightarrow_e}{p \rightarrow (p \rightarrow q), (p \rightarrow q) \rightarrow p \vdash q} \rightarrow_e$$

4.9 Transformations

84 $p \rightarrow q \vdash_m p \rightarrow (p \wedge q)$

$$\frac{\frac{\frac{}{p \rightarrow q, p \vdash p} \text{HYP} \quad \frac{\frac{}{p \rightarrow q, p \vdash p \rightarrow q} \text{HYP} \quad \frac{}{p \rightarrow q, p \vdash p} \text{HYP}}{p \rightarrow q, p \vdash q} \rightarrow_e}{p \rightarrow q, p \vdash p \wedge q} \wedge_i}{p \rightarrow q \vdash p \rightarrow (p \wedge q)} \rightarrow_i$$

85 $p \rightarrow r \vdash_m (p \wedge q) \rightarrow r$

$$\frac{\frac{\frac{}{p \rightarrow r, p \wedge q \vdash p \rightarrow r} \text{HYP} \quad \frac{\frac{}{p \rightarrow r, p \wedge q \vdash p \wedge q} \text{HYP}}{p \rightarrow r, q \rightarrow r, p \wedge q \vdash p} \wedge_e}{p \rightarrow r, p \wedge q \vdash r} \rightarrow_e}{p \rightarrow r \vdash (p \wedge q) \rightarrow r} \rightarrow_i$$

86 $p \rightarrow q \vdash_m (p \wedge r) \rightarrow (q \wedge r)$

$$\frac{\frac{\frac{}{p \rightarrow q, p \wedge r \vdash p \rightarrow q} \text{HYP} \quad \frac{\frac{}{p \rightarrow q, p \wedge r \vdash p \wedge r} \text{HYP}}{p \rightarrow q, p \wedge r \vdash p} \wedge_e}{p \rightarrow q, p \wedge r \vdash q} \rightarrow_e \quad \frac{\frac{}{p \rightarrow q, p \wedge r \vdash p \wedge r} \text{HYP}}{p \rightarrow q, p \wedge r \vdash r} \wedge_e}{p \rightarrow q, p \wedge r \vdash q \wedge r} \wedge_i}{p \rightarrow q \vdash (p \wedge r) \rightarrow (q \wedge r)} \rightarrow_i$$

87 $p \rightarrow q \vdash_m (p \vee r) \rightarrow (q \vee r)$

$$\frac{\frac{\frac{}{p \rightarrow q, p \vee r \vdash p \rightarrow q} \text{HYP} \quad \frac{\frac{}{p \rightarrow q, p \vee r \vdash p} \text{HYP}}{p \rightarrow q, p \vee r \vdash p} \rightarrow_e \quad \frac{\frac{}{p \rightarrow q, p \vee r \vdash p \vee r} \text{HYP}}{p \rightarrow q, p \vee r \vdash r} \wedge_e}{p \rightarrow q, p \vee r \vdash q \vee r} \vee_i}{p \rightarrow q \vdash (p \vee r) \rightarrow (q \vee r)} \rightarrow_i$$

88 $q \rightarrow r \vdash_m (p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)$

$$\frac{\frac{\frac{}{q \rightarrow r, p \rightarrow q, p \vdash q \rightarrow r} \text{HYP} \quad \frac{\frac{}{q \rightarrow r, p \rightarrow q, p \vdash p \rightarrow q} \text{HYP} \quad \frac{}{q \rightarrow r, p \rightarrow q, p \vdash p} \text{HYP}}{q \rightarrow r, p \rightarrow q, p \vdash q} \rightarrow_e}{q \rightarrow r, p \rightarrow q, p \vdash r} \rightarrow_e}{q \rightarrow r \vdash (p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)} \rightarrow_i$$

89 $(p \wedge r) \rightarrow (q \wedge r), r \vdash_m p \rightarrow q$

$$\frac{\frac{\frac{}{(p \wedge r) \rightarrow (q \wedge r), r \vdash (p \wedge r) \rightarrow (q \wedge r)} \text{HYP} \quad \frac{\frac{}{(p \wedge r) \rightarrow (q \wedge r), r \vdash p} \text{HYP} \quad \frac{}{(p \wedge r) \rightarrow (q \wedge r), r \vdash r} \text{HYP}}{(p \wedge r) \rightarrow (q \wedge r), r \vdash p \wedge r} \wedge_i}{(p \wedge r) \rightarrow (q \wedge r), r \vdash q \wedge r} \rightarrow_e}{(p \wedge r) \rightarrow (q \wedge r), r \vdash q} \wedge_e}{(p \wedge r) \rightarrow (q \wedge r), r \vdash p \rightarrow q} \rightarrow_i$$

90 $(p \vee r) \rightarrow (q \vee r), \neg r \vdash_i p \rightarrow q$

On note $\Gamma = (p \vee r) \rightarrow (q \vee r), \neg r, p$

$$\begin{array}{c}
 \frac{\overline{\Gamma \vdash (p \vee r) \rightarrow (q \vee r)} \text{ HYP} \quad \frac{\overline{\Gamma \vdash p} \text{ HYP} \quad \Gamma \vdash p \vee r \quad \vee_i}{\Gamma \vdash p \vee r} \rightarrow_e \quad \frac{\overline{\Gamma, q \vdash q} \text{ HYP} \quad \frac{\overline{\Gamma, r \vdash r} \text{ HYP} \quad \overline{\Gamma, r \vdash \neg r} \text{ HYP}}{\Gamma, r \vdash \perp} \neg_e}{\Gamma, r \vdash q} \perp_e \\
 \frac{\Gamma \vdash q \vee r \quad \frac{(p \vee r) \rightarrow (q \vee r), \neg r, p \vdash q}{(p \vee r) \rightarrow (q \vee r), \neg r \vdash p \rightarrow q} \rightarrow_i}{(p \vee r) \rightarrow (q \vee r), \neg r \vdash p \rightarrow q} \vee_e
 \end{array}$$