

Automates

12 mars 2026

1 RACINE CARRÉE D'UN LANGAGE

Dans toute cette partie, ε désigne le mot vide, Σ désigne un alphabet et Σ^* l'ensemble des mots finis sur Σ .

1.1 DÉFINITIONS

Définition 1. Un automate déterministe A est un quintuplet $A = (Q, \Sigma, q_0, F, \delta)$, avec :

- Q un ensemble d'états ;
- Σ un alphabet
- q_0 l'état initial
- $F \subseteq Q$ un ensemble d'états finaux ;
- $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow Q$ une application de transition.

Définition 2. Soit L un langage sur Σ . Le carré du langage L est l'ensemble $\{uu, u \in L\}$. Il est noté $L \odot L$.

Définition 3. Soit L un langage sur Σ . La racine carrée du langage L est l'ensemble $\{u \in \Sigma^* \mid uu \in L\}$. Elle est notée $\sqrt{L}$.

1.2 EXEMPLES

1. Décrire $\sqrt{L}$ lorsque $\Sigma = \{a, b\}$ et L est décrit par l'expression rationnelle a^*b^* .
2. Décrire $\sqrt{L}$ lorsque $\Sigma = \{a, b\}$ et L est décrit par l'expression rationnelle $b^*a^*b^*$.

1.3 PROPRIÉTÉS DE LA RACINE CARRÉE D'UN LANGAGE RATIONNEL

Ici, on fixe L un langage rationnel sur un alphabet Σ et $A = (Q, \Sigma, q_0, F, \delta)$ un automate fini reconnaissant celui-ci.

Définition 4. Soient $A = (Q, \Sigma, q_0, F, \delta)$ un automate fini déterministe, q' un élément de Q et F' une partie de Q . L'automate $(Q, \Sigma, q', F', \delta)$ est noté $A_{q', F'}$. Si on note L le langage reconnu par A , $L_{q', F'}$ désigne le langage reconnu par $A_{q', F'}$.

3. Soit u un mot de Σ^* . Montrer que u est un élément de $\sqrt{L}$ si et seulement s'il existe un $q \in Q$ tel que $u \in L_{q_0, \{q\}}$ et $u \in L_{q, F}$.
4. En déduire que $\sqrt{L}$ est un langage rationnel.
5. Montrer que l'on a $(\sqrt{L} \odot \sqrt{L}) \subset L$.

2 RÉSIDUELS D'UN LANGAGE

Soit Σ un alphabet fini non vide. Soit $L \subset \Sigma^*$, et soit $u \in \Sigma^*$, on pose :

$$u^{-1}L = \{v \in \Sigma^* : uv \in L\}$$

Un tel ensemble est appelé résiduel de L . On souhaite montrer qu'un langage est reconnaissable ssi il possède un nombre fini de résiduels.

1. Soient $u, v \in \Sigma^*$ et $L \subset \Sigma^*$, établir une relation entre $(uv)^{-1}L$ et $v^{-1}(u^{-1}L)$. On justifiera cette relation.
2. On fixe ici $\Sigma = \{a, b\}$ et on considère L représenté par l'expression régulière $a(ba + a)^*$.
Représenter graphiquement un automate qui reconnaît L puis donner $a^{-1}L$, $b^{-1}L$ et $(ab)^{-1}L$.

3. On revient au cas général et on fixe $L \subset \Sigma^*$.

On suppose que l'ensemble des résiduels de L , $R = \{u^{-1}L : u \in \Sigma^*\}$ est fini.

On pose $\mathcal{A} = (R, i_0, F, \delta)$ un automate déterministe tel que $\forall u^{-1}L \in R, \forall \alpha \in \Sigma, \delta(u^{-1}L, \alpha) = (u\alpha)^{-1}L$.

- Cette construction n'est pas forcément bien définie, justifier qu'elle l'est. Proposer une définition plus propre qui ne poserait pas ce questionnement.
 - Déterminer une formule pour la fonction étendue de δ et la prouver.
 - Déterminer i_0 et F pour que le langage reconnu par $\mathcal{A}$ soit bien L . Prouver que votre proposition convient.
 - Représenter l'automate obtenu pour le langage de la question précédente.
4. Réciproquement, on se donne un langage L reconnaissable et $\mathcal{A} = (Q, q_0, F, \delta)$ un automate déterministe complet le reconnaissant. Pour $q \in Q$, on pose L_q le langage reconnu par (Q, q, F, δ) .
- Soit $u \in \Sigma^*$, établir un lien entre $u^{-1}L$ et $L_{\delta^*(q_0, u)}$.
 - Démontrer que L n'a qu'un nombre fini de résiduels.

3 RECHERCHE DE MOTIFS ET AUTOMATES À REPLIS

Le but du problème est d'étudier des algorithmes permettant de rechercher efficacement des occurrences d'une ou plusieurs chaînes de caractères (appelées *motifs*) à l'intérieur d'une longue chaîne de caractères.

3.1 PRÉLIMINAIRES CONCERNANT LA PROGRAMMATION

Il faudra coder des fonctions à l'aide du langage de programmation OCaml, tout autre langage étant exclu. Lorsque le candidat écrira une fonction, il pourra faire appel à d'autres fonctions définies dans les questions précédentes ; il pourra aussi définir des fonctions auxiliaires. Quand l'énoncé demande de coder une fonction, il n'est pas nécessaire de justifier que celle-ci est correcte, sauf si l'énoncé le demande explicitement. Enfin, si les paramètres d'une fonction à coder sont supposés vérifier certaines hypothèses, il ne sera pas utile dans l'écriture de cette fonction de tester si les hypothèses sont bien vérifiées.

Dans les questions du problème, un même identificateur écrit dans deux polices de caractères différentes désignera la même entité, mais du point de vue mathématique pour la police en italique (par exemple n) et du point de vue informatique pour celle en romain avec espacement fixe (par exemple `n`).

3.2 DÉFINITIONS GÉNÉRALES

On fixe un *alphabet* Σ , c'est-à-dire un ensemble fini, dont les éléments sont appelés *symboles*. On note $\lambda > 0$ le nombre d'éléments de cet alphabet, et on suppose que cette taille λ est disponible depuis les fonctions OCaml à implémenter sous la forme d'une constante globale `lambda`. Par exemple :

```
let lambda = 5 ;;
```

On supposera que les éléments de Σ sont ordonnés, par exemple par ordre alphabétique, et on les note dans l'ordre $\alpha_0 < \dots < \alpha_{\lambda-1}$. On dit que le *code* d'un symbole α de l'alphabet est l'entier i tel que $\alpha = \alpha_i$ ($0 \leq i \leq \lambda - 1$). Une *chaîne de caractères* s est une suite *non vide* $u_1 \dots u_k$ de symboles de Σ . La *longueur* de s est son nombre de symboles, c'est à dire, ici, k . On représentera en OCaml les chaînes de caractères par des listes d'entiers (`int list`), chaque entier étant le code d'un symbole. Ainsi, si l'alphabet est $\Sigma = \{a, b, c\}$, dans cet ordre, la chaîne de caractères "abac" sera représentée par la liste `[0; 1; 0; 2]`. En particulier, on n'utilisera jamais le type `string`.

3.3 RECHERCHE NAÏVE D'UN MOTIF

Une *occurrence* d'une chaîne de caractères $s = s_1 \dots s_k$ (aussi appelée un *motif*) dans une autre chaîne $t = \beta_1 \dots \beta_n$ est un entier naturel y avec $1 \leq y \leq n$ tel que, pour tout entier i tel que $0 \leq i \leq k - 1$, $s_{k-i} = \beta_{y-i}$. En d'autres termes, l'occurrence indique la position du dernier caractère du motif au sein de la chaîne de caractères t (les positions commençant à 1).

Par exemple, si $\Sigma = \{a, b, c, d, e\}$, s est le motif "abc" et t la chaîne de caractères "abcabcdababcdabde", il y a quatre occurrences de s dans t à savoir 3, 6, 12 et 16.

- Soient s, t deux chaînes de caractères. Est-il possible d'avoir deux occurrences y et y' de s dans t avec $y < y'$ et $y \geq y' - k + 1$. Si oui, donner un exemple ; sinon, le prouver.
- Quel est le nombre maximal d'occurrences d'un motif de longueur k dans une chaîne de caractères de longueur $n \geq k$? Prouver que cette borne est toujours respectée, et que cette borne est atteinte.

3. Programmer une fonction `longueur` : `'a list` $\rightarrow$ `int` qui prend en entrée une liste et qui renvoie la longueur de cette liste. Quelle est la complexité de cette fonction, en terme du nombre n d'éléments de la liste ?
4. Programmer une fonction `prefixe` : `int list` $\rightarrow$ `int list` $\rightarrow$ `bool` prenant en entrée deux listes d'entiers s et t codant des chaînes de caractères et testant si s est un préfixe de t . Quelle est la complexité de cette fonction en termes des longueurs k et n de s et t ?
5. A l'aide des fonctions `longueur` et `prefixe`, programmer une fonction `recherche_naive` : `int list` $\rightarrow$ `int list` $\rightarrow$ `int list`, la plus directe possible, telle que si s est un motif et t une chaîne de caractères, `recherche_naive s t` renvoie la liste des entiers y qui sont des occurrences de s dans t , triés par ordre croissant.
6. Quelle est la complexité de la fonction `recherche_naive`, en terme des longueurs k et n de ses deux paramètres s et t ?

3.4 AUTOMATES FINIS DÉTERMINISTES À REPLI

Un *automate fini déterministe à repli* (ou *AFDR*) sur l'alphabet Σ est un quadruplet $\mathcal{A} = (k, F, \delta, \rho)$ tel que

- $k \in \mathbb{N}$ est un entier strictement positif représentant le *nombre d'états* de $\mathcal{A}$; l'ensemble des *états* de $\mathcal{A}$ est $Q_{\mathcal{A}} = \{0, 1, \dots, k-1\}$ et 0 est appelé l'*état initial*.
- $F \subset Q_{\mathcal{A}}$ est un ensemble d'états appelés *finals*.
- $\delta : Q_{\mathcal{A}} \times \Sigma \rightarrow Q_{\mathcal{A}}$ est une *fonction partielle de transition* (c'est-à-dire, une fonction dont le domaine de définition est un sous-ensemble de $Q_{\mathcal{A}} \times \Sigma$); on impose que $\delta(0, \alpha)$ soit défini pour tout $\alpha \in \Sigma$.
- $\rho : Q_{\mathcal{A}} \setminus \{0\} \rightarrow Q_{\mathcal{A}}$ est une application (c'est-à-dire une fonction totale), appelée *fonction de repli*, telle que pour tout $q \in Q_{\mathcal{A}}$ avec $q \neq 0$, $\rho(q) < q$. On prolonge ρ en convenant $\rho(0) = 0$.

Un AFDR est représenté en OCaml par le type enregistrement suivant :

```
type afdr={
  final : bool array ;
  transition : int array array ;
  repli : int array } ;;
```

où si af est de type afdr et représente un AFDR $\mathcal{A} = (k, F, \delta, \rho)$,

- `af.final` est un tableau de taille k de booléens tel que si $q \in Q_A$, `af.final.(q)` contient `true` si et seulement si $q \in F$;
- `af.transition` est un tableau de taille k de tableaux de taille λ d'entiers, tel que si $q \in Q_A$ et $\alpha_i \in \Sigma$ de code i , `af.transition.(q).(i)` contient -1 si $\delta(q, \alpha_i)$ n'est pas défini, et contient $\delta(q, \alpha_i)$ sinon;
- `af.repli` est un tableau de taille k d'entiers tel que `af.repli.(0)` contient 0 et `af.repli.(q)` pour $q \in Q_A \setminus \{0\}$ contient $\rho(q)$.

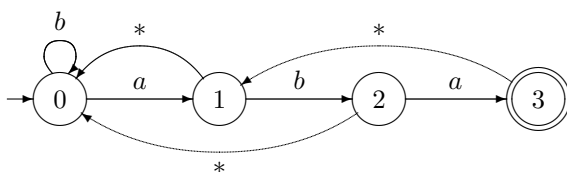
On observe que le type `afdr` ne code pas explicitement la valeur de k , mais k est par exemple la longueur du tableau `af.final`.

On dessine un AFDR de manière similaire au dessin d'un automate fini déterministe classique, en faisant figurer une flèche d'étiquette $*$ pour indiquer les replis d'un état vers un autre. Les états finals sont figurés par un double cercle.

Considérons par exemple l'automate $\mathcal{A}_1 = (k_1, F_1, \delta_1, \rho_1)$ sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ défini par $k_1 = 4$, $F_1 = \{3\}$ et les fonctions δ_1 et ρ_1 suivantes :

δ_1			ρ_1	
q	$\delta_1(q, a)$	$\delta_1(q, b)$	q	$\rho_1(q)$
0	1	0	0	
1		2	1	0
2	3		2	0
3			3	1

$\mathcal{A}_1$ peut être dessiné comme suit



7. Soit $\mathcal{A} = (k, F, \delta, \rho)$ un AFDR. Pour tout $q \in Q_{\mathcal{A}}$, on note $\rho^j(q)$ pour $j \in \mathbb{N}$ l'application répétée j fois de la fonction ρ à q , c'est-à-dire $\underbrace{\rho(\rho(\dots(\rho(q))\dots))}_{j \text{ fois}}$. Par convention, pour tout état q , on note $\rho^0(q) = q$.

Montrer que pour tout $q \in Q_A$, pour tout $\alpha \in \Sigma$, il existe $j > 0$ tel que $\delta(\rho^j(q), \alpha)$ est défini.

On dit qu'un AFDR $\mathcal{A} = (k, F, \delta, \rho)$ accepte un mot $u = u_1 \dots u_p \in \Sigma^*$ s'il existe une suite finie $q_0, q'_1, q_1, q'_2, q_2, \dots, q'_{p-1}, q_{p-1}, q'_p, q_p$ d'états de $\mathcal{A}$ avec :

- $q_0 = 0$;
- pour tout $1 \leq i \leq p$, $q'_i = \rho^j(q_{i-1})$ avec $j \geq 0$ le plus petit entier tel que $\delta(\rho^j(q_{i-1}), u_i)$ est défini;
- pour tout $1 \leq i \leq p$, $q_i = \delta(q'_i, u_i)$;
- $q_p \in F$.

Le langage accepté par un AFDR est l'ensemble des mots acceptés.

Ainsi, $\mathcal{A}_1$ accepte le mot "ababa" comme le montre la suite d'états parcourus

0, 0, 1, 1, 2, 2, 3, 1, 2, 2, 3

On remarque qu'un AFDR dont la fonction de transition δ est définie partout peut être vu comme un automate fini déterministe classique, et que cet automate fini déterministe est *complet* (ce qui signifie précisément que sa fonction de transition est définie partout). En effet, les puissances non nulles de la fonction de repli ρ ne sont utilisées que si la fonction de transition n'est pas définie. On appellera un tel automate fini déterministe complet un AFDC.

8. Construire (sans justification) un AFDC sur l'alphabet $\{a, b\}$ reconnaissant le même langage que $\mathcal{A}_1$ et ayant le même nombre d'états que $\mathcal{A}_1$.
9. Donner (sans justification) une description concise du langage reconnu par l'AFDR $\mathcal{A}_1$.
10. Programmer une fonction `copie_afdr : afdr → afdr` qui renvoie un nouvel AFDR identique à l'AFDR fourni en entrée, mais ne partageant aucune donnée avec lui. On pourra utiliser la fonction standard `Array.copy : 'a array → 'a array` qui renvoie un nouveau tableau contenant les mêmes éléments que les éléments d'entrée et s'exécute en un temps proportionnel au nombre d'éléments du tableau d'entrée.
11. En s'inspirant de la réponse aux questions 7 et 8, et en utilisant la fonction `copie_afdr`, programmer une fonction `enleve_repli : afdr → afdr` telle que si a représente un AFDR $\mathcal{A}$, `enleve_repli a` renvoie un AFDC reconnaissant le même langage. On souhaite que cette fonction s'exécute en temps $O(k \times \lambda)$, où k est le nombre d'états de $\mathcal{A}$ et λ la taille de l'alphabet. Montrer que la fonction proposée a bien cette complexité.
12. Etant donné un AFDC $\mathcal{A}$ et un mot $u = u_1 \dots u_n$ sur Σ , proposer un algorithme (pas un programme OCaml) en $O(n)$ pour calculer la liste triée des entiers i avec $1 \leq i \leq n$ tels que le préfixe $u_1 \dots u_i$ de u est accepté par $\mathcal{A}$.
13. On veut implémenter en OCaml l'algorithme de la question précédente.
Programmer une fonction `occurrences : afdr → int list → int list` telle que quand a représente un AFDC $\mathcal{A}$ et `liste` est une liste d'entiers $j_1, \dots, j_n$ codant des symboles $\alpha_{j_1}, \dots, \alpha_{j_n}$ de l'alphabet Σ , `occurrences a liste` renvoie la liste des entiers i avec $1 \leq i \leq n$ tels que le mot $\alpha_{j_1}, \dots, \alpha_{j_i}$ est reconnu par $\mathcal{A}$. Quelle est la complexité de cette fonction en terme de la longueur n de la liste d'entiers, du nombre k d'états de l'automate $\mathcal{A}$ et de λ ?

3.5 AUTOMATE DE KNUTH-MORRIS-PRATT

L'automate de Knuth-Morris-Pratt (ou automate KMP) associé à un motif $s = u_1 \dots u_k$ sur l'alphabet Σ est un AFDR $\mathcal{A}_s^{KMP} = (k', F, \delta, \rho)$ sur Σ avec :

- $k' = k + 1$.
- $F = \{k\}$.
- Pour tout $1 \leq i \leq k$, $\delta(i - 1, u_i) = i$ et, pour tout $\alpha \in \Sigma \setminus \{u_1\}$, $\delta(0, \alpha) = 0$; aucune autre transition n'est définie.
- Pour tout $1 \leq i \leq k$, $\rho(i)$ est le plus grand entier $0 \leq j < i$ tel que $u_1 \dots u_j$ est un suffixe de $u_1 \dots u_i$.
Ajout : pour $j = 0$, $u_1 \dots u_j$ est le mot vide qui est suffixe de tout mot.

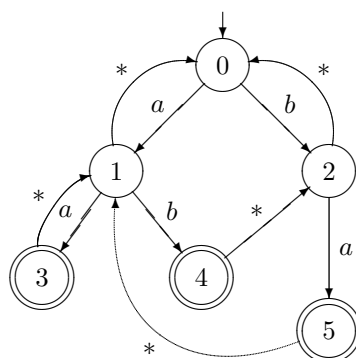
On peut ainsi vérifier que l'automate $\mathcal{A}_1$ de la partie précédente est l'automate KMP associé à "aba" sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$.

14. Construire (sans justification) l'automate KMP associé à "ababc" sur l'alphabet $\{a, b, c\}$.
15. Donner (sans justification) une description concise du langage reconnu par l'AFDR $\mathcal{A}_s^{KMP}$ pour un motif s arbitraire.
16. Montrer que si $s = u_1 \dots u_k$ est un motif et $(k + 1, F, \delta, \rho)$ l'automate KMP associé à s , alors pour tout $1 \leq i \leq k$, si $j \geq 0$ est le plus petit entier tel que $\delta(\rho^j(\rho(i - 1)), u_i)$ est défini (qui existe d'après la question 7), alors $\rho(i) = \delta(\rho^j(\rho(i - 1)), u_i)$.
Ajout : il me semble que la formule n'est valable que pour $i \geq 2$. Par ailleurs, c'est une question un peu délicate pour laquelle une explication peut se révéler plus efficace qu'une formalisation complète mais alambiquée.

17. En utilisant la caractérisation de la question 16 (*ajout : en adaptant si $i = 1$*), programmer une fonction `automate_kmp : int list → afdr` qui prend en entrée une liste d'entiers s codant une chaîne de caractères s et qui renvoie l'AFDR $\mathcal{A}_s^{KMP}$.
18. Pour un motif $s = u_1 \dots u_k$ et pour tout $1 \leq i \leq k$, on note j_i le plus petit entier tel que $\delta(\rho^{j_i}(\rho(i-1)), u_i)$ est défini, comme à la question 16. Montrer que pour tout $1 \leq i \leq k$, $\rho(i) \leq \rho(i-1) + 1 - j_i$, et en déduire que $\sum_{i=1}^k j_i$ est en $O(k)$.
19. Quelle est la complexité de la fonction `automate_kmp` en terme de la longueur k du motif s passé en argument et de λ ? Prouver cette affirmation.
20. En s'appuyant sur les fonctions `automate_kmp`, `enleve_repli` et `occurrences`, programmer une fonction `recherche_kmp : int list → int list → int list` telle que si s est un motif de longueur k et t une chaîne de caractères, `recherche_kmp s t` renvoie la liste des occurrences y de s dans t , triées par ordre croissant.
Quelle est la complexité de cette fonction en terme des longueurs k et n de s et t et de λ . Comparer avec la complexité de la fonction `recherche_naive` obtenue en question 6.

3.6 ENSEMBLE DE MOTIFS ET AUTOMATES À REPLI ARBORESCENTS

On considère maintenant l'AFDR $\mathcal{A}_2$ suivant, sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$.



21. Donner (sans justification) une description concise du langage reconnu par l'AFDR $\mathcal{A}_2$.
 22. On considère l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Construire (sans justification) un AFDR dont le langage reconnu est l'ensemble des mots dont un suffixe est "baa" ou "bab" ou "bc". Indication : on cherchera un AFDR tel que si $\delta(q, \alpha)$ est défini et q est non nul, alors $\delta(q, \alpha) > q$.
- On fixe maintenant un ensemble fini S de motifs. L'ensemble des *occurrences de S dans un chaîne de caractères t* est l'ensemble des occurrences de chacun des motifs de S dans t .
23. En utilisant la fonction `rechercher_kmp`, programmer une fonction `recherche_dictionnaire_kmp : int list list → int list → int list` qui est telle que si S est un ensemble fini de motifs codé comme une liste de motifs s et t une chaîne de caractères `recherche_dictionnaire_kmp s t` renvoie la liste des occurrences y d'un motif de S dans t . On n'impose pas d'ordre particulier sur cette liste, et on autorise les doublons.
Quelle est la complexité de cette fonction, en terme du nombre $|S|$ de motifs, de la longueur k maximale d'un motif, de λ et de la longueur n de t ?
 24. En s'inspirant de l'automate $\mathcal{A}_2$, de la réponse à la question 22 et de la partie 3, proposer une approche pour calculer efficacement les occurrences d'un ensemble fini S de motifs dans une chaîne de caractères t . On ne demande ni une formalisation complète de cette approche, ni une implémentation, mais une stratégie générale et les grandes étapes nécessaires à la résolution du problème. On pourra faire l'hypothèse, pour simplifier, que l'ensemble S ne contient pas deux mots qui sont préfixes l'un de l'autre.
Quelles difficultés sont à prévoir dans l'implémentation? Quelle complexité peut-on espérer avec une telle approche, en terme du nombre $|S|$ de motifs, de la longueur k maximale d'un motif, de λ et de la longueur n de t ? Comparer avec la complexité obtenue en réponse à la question précédente.