Exercice : arbres binaires de recherche et B tree

27 mai

1. Rappeler la définition d'un arbre binaire de recherche stockant des entiers munis de la relation d'ordre usuelle.

   On utilisera le type suivant pour représenter un tel arbre de recherche :

   ```
   type arbre = Vide | N of (int*arbre*arbre)
   ```

2. Ecrire une fonction `recherche : arbre->int->bool` qui prend en entrée un arbre binaire de recherche et un entier et renvoie `true` si et seulement si l'élément passé en argument est stocké dans l'arbre binaire de recherche.

3. Donner la complexité de votre fonction. Discuter de celle-ci dans le meilleur cas, le pire cas suivant la forme de l'arbre passé en argument. Quelle solution, au programme de Mp2i/MPI, permettrait de garantir une complexité efficace?

4. Ecrire une fonction `collecte : arbre-> int list` qui prend en argument un arbre binaire de recherche et renvoie la liste des entiers qui le composent triée par valeurs croissantes. Quelle est la complexité de votre fonction?

5. Nous proposons le programme suivant pour déterminer si un arbre binaire est bien un arbre binaire de recherche :

   ```
   let rec est_ABR a = match a with
      |Vide->true
      |N(x,Vide,Vide)->true
      |N(x,Vide,(N(y,gd,dd) as d))-> (x< y) && (est_ABR d )
      |N(x,(N(y,gg,dg) as g),Vide)-> (y<=x) && (est_ABR g)
      |N(x,(N(y,gg,dg) as g),(N(z,gd,dd) as d))-> (x>=y)&&(x<z)&&(est_ABR g)&&(est_ABR d);;
   ```

   A l'aide d'une exemple bien choisi, montrer que cette fonction est incorrecte.

6. Pour proposer une version correcte, nous allons associer un intervalle à chaque noeud dans lequel doit se trouver la cé du noeud de la manière suivante : lorsqu'un arbre a pour racine k alors son sous arbre gauche a toutes ses clés inférieures ou égales à k et les clés du sous arbre droit sous toutes strictement supérieures à k. Ainsi la racine est associée à l'intervalle [`min_int,max_int`] et les autres noeuds correspondent à des intervalles dont les bornes dépendent des valeurs des noeuds qui composent le chemin depuis la racine de l'arbre. Donner les intervalles pour chacun des noeuds de l'arbre suivant :

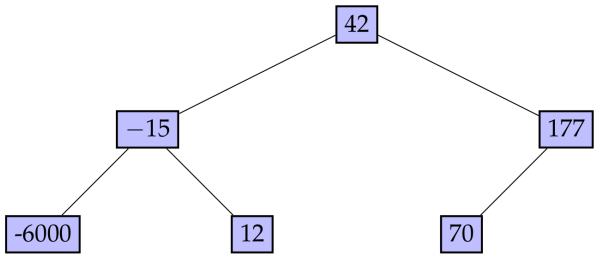


FIGURE 1 – Un arbre binaire de recherche

7. On utilisera donc `max_int` et `min_int` pour écrire une fonction `est_abr_correcte : arbre-> bool` qui détermine si un arbre passé en argument est bien un arbre binaire de recherche. On pourra écrire une fonction auxillaire qui prend en arguments les bornes qui encadrent la valeur de la racine.

   Nous allons maintenant travailler sur les B-tree qui consistent en une généralisation de la notion d'arbre binaire de recherche et sont utilisés dans les gestionnaires de bases de données. Un B-tree est un arbre d'arité quelconque défini de la manière suivante :

   Un B-tree d'ordre t est un arbre qui satisfait les propriétés suivantes :

   - (S1) Tous les chemins de la racine à une feuille ont la même longueur, appelée hauteur de l'arbre.
   - (S2) La racine est une feuille ou bien a au moins 2 enfants.
   - (S3) Chaque noeud qui n'est ni racine ni feuille possède au moins $t+1$ enfants.
   - (S4) Chaque noeud a au plus $2t + 1$ enfants.
   - (C1) Les noeuds contiennent des clés : la racine contient de 1 à $2t$ clés et les autres noeuds, entre t et $2t$ clés.
   - (C2) Dans chaque noeud, les éléments sont stockés de manière croissante.
   - (C3) Chaque noeud qui contient ℓ clés a $\ell + 1$ enfants.
   - (C4) Soit P un noeud contenant ℓ clés $x_0, \ldots, x_{\ell-1}$. Soient $P_0, \ldots, P_\ell$ ses enfants et $K(P_i)$ $(0 \leq i \leq \ell)$ l'ensemble des clés de chacun des sous arbres P_i. On a alors :
     - $\forall y \in K(P_0), y \leq x_0$
     - $\forall 1 \leq y \leq \ell - 1, \forall y \in K(P_i), x_{i-1} \leq y \leq x_i$
     - $\forall y \in K(P_\ell), y \geq x_{\ell-1}$

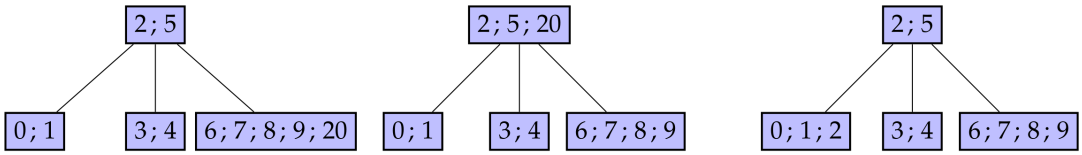
8. Pour chacun des arbres suivants , dire si c'est bien un B-tree d'ordre 2.
9. Dans le B-tree de la figure suivante, expliquer comment chercher la clés de valeur 8.

   Pour représenter un B-tree, on va utiliser la type suivant :

   ```
   type btree = Feuille of (int list) | Noeud of (int list * btree array)
   ```

   Ainsi, chaque noeud contient la liste triée de ses c clés et un tableau de taille $c + 1$ contenant ses sous-arbres.

Les arbres de la Figure 3 sont-ils des B-trees d'ordre 2 ?



(a) Arbre 1 (b) Arbre 2 (c) Arbre 3

FIGURE 3 – Quelques arbres.

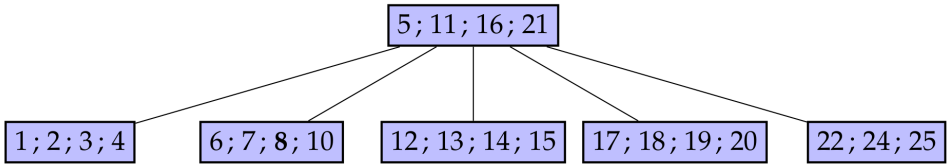


FIGURE 4 – Exemple de B-tree (d'ordre 2) pour la recherche

10. Ecrire une fonction `recherche_b : btree-> int->bool` qui détermine si un élément est contenu dans un B-tree.

11. On va maintenant analyser la complexité de cette recherche. Soit a un B-tree non vide d'ordre $t > 1$ et de hauteur $h \geq 1$. Nous allons d'abord compter le nombre noeuds maximal N_{max} (resp. minimal N_{min}) qu'il contient.

    (a) Montrer que $N_{min} = 1 + \frac{2}{t}((t+1)^{h-1} - 1)$ pour $h \geq 2$.

    (b) Montrer vque $N_{max} = \frac{1}{2t}((2t+1)^h - 1)$ pour $h \geq 1$.

    (c) En déduire un encadrement du nombre de clés contenues dans un B-tree d'ordre t et de hauteur $h \geq 2$.

    (d) Conclure sur la complexité de la recherche dans un B-tree en fonction de son nombre de noeuds.