

# Préparation à l'oral 2 : langages

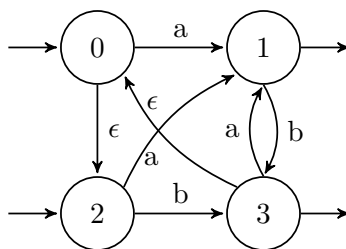
26 et 28 mai

## 1 Automates

1

### Exercice 2.

1. Rappeler la définition d'un langage régulier.
2. Les langages suivants sont-ils réguliers? Justifier.
  - (a)  $L_1 = \{a^n b a^m \mid n, m \in \mathbb{N}\}$
  - (b)  $L_2 = \{a^n b a^m \mid n, m \in \mathbb{N}, n \leq m\}$
  - (c)  $L_3 = \{a^n b a^m \mid n, m \in \mathbb{N}, n > m\}$
  - (d)  $L_4 = \{a^n b a^m \mid n, m \in \mathbb{N}, n + m \equiv 0 \pmod{2}\}$
3. On considère l'automate non déterministe suivant :



- (a) Déterminiser cet automate.
- (b) Construire une expression régulière dénotant le langage reconnu par cet automate.
- (c) Décrire simplement avec des mots le langage reconnu par cet automate.

2

Dans tout l'exercice on considère l'alphabet binaire  $B = \{0, 1\}$ . On considère l'application  $\nu$  de  $B^*$  dans  $\mathbb{N}$  qui à un mot binaire associe l'entier naturel dont c'est une écriture binaire (il n'y a pas d'unicité à cause de possibles 0 inutiles en tête) : si  $u = u_1 \dots u_n$  alors

$$\nu(u) = \sum_{i=1}^n u_i \cdot 2^{n-i}.$$

Par convention  $\nu(\varepsilon) = 0$ , où  $\varepsilon$  est le mot vide.

1. Proposez des automates déterministes et complets  $\mathcal{A}_2$ ,  $\mathcal{A}_3$  et  $\mathcal{A}_6$  qui reconnaissent les mots  $u$  de  $B^*$  tels que  $\nu(u)$  soit respectivement multiple de 2, 3 et 6.
2. Montrez que pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$  il existe un unique mot  $u \in B^*$  de longueur minimale tel que  $\nu(u) = n$ . On note  $\mu(n)$  ce mot.
3. Est-ce que  $\mu(\mathbb{N})$  est un langage rationnel?
4. On encode un automate déterministe et complet sur  $B$  dont l'ensemble d'états est  $\{0, \dots, n-1\}$  par :
  - un champs `n` qui indique son nombre d'états;
  - un champs `q0` qui indique l'état initial;
  - un double tableau `delta` pour la fonction de transition, avec `delta[p][a] = q` si et seulement si on a une transition  $p \xrightarrow{a} q$ , pour  $a \in B$  et  $p, q \in \{0, \dots, n-1\}$ ;
  - un tableau de booléens `F`, tel que `F[p]` est vrai si et seulement si  $p$  est un état final.

Ecrire un algorithme pour tester si un mot (représenté par une chaîne de caractères) est reconnu par un automate ainsi représenté, de complexité linéaire en la longueur du mot.

- Proposez un algorithme en  $\mathcal{O}(n)$  pour tester si le langage reconnu par un automate est non-vidé : il renvoie **Faux** s'il est vide, et sinon il renvoie un mot de longueur minimale dans le langage reconnu.
- Peut-on adapter l'algorithme précédent pour que si le langage est non-vidé, il renvoie le plus petit mot pour l'ordre lexicographique dans langage reconnu ?

**3**

Soit  $\Sigma$  un alphabet fini non vide. Si  $\mathcal{L} \subset \Sigma^*$  est un langage, la racine carrée de  $\mathcal{L}$ , notée  $\sqrt{\mathcal{L}}$ , est le langage défini par

$$\sqrt{\mathcal{L}} = \{u \in \Sigma^* \mid uu \in \mathcal{L}\}.$$

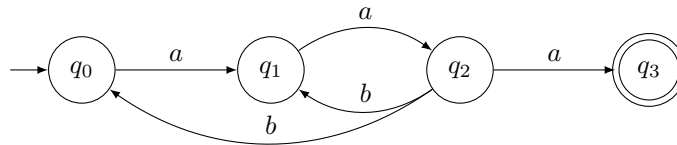
- Calculez la racine carrée des langages suivants pour  $\Sigma = \{a, b\}$  :  $\mathcal{L}_1 = \Sigma^* \cdot b$ ,  $\mathcal{L}_2 = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$  et  $\mathcal{L}_3 = a^* b^* a^* b^*$ .
- Soit  $\mathcal{A} = (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$  un automate déterministe et complet qui reconnaît un langage  $\mathcal{L}$ . Pour toute paire d'états  $(p, q) \in Q^2$ , on note  $\mathcal{A}_{p,q}$  l'automate  $(\Sigma, Q, \delta, p, \{q\})$  et  $\mathcal{L}_{p,q}$  le langage reconnu par  $\mathcal{A}_{p,q}$ . Exprimez  $\mathcal{L}$  comme union de  $\mathcal{L}_{p,q}$ .
- Soit  $q \in Q$  et  $f \in F$  deux états de  $\mathcal{A} = (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$ . Montrez que  $\mathcal{L}_{q_0,q} \cap \mathcal{L}_{q,f}$  est inclus dans  $\sqrt{\mathcal{L}}$ .
- Exprimez  $\sqrt{\mathcal{L}}$  comme une union d'intersections de  $\mathcal{L}_{p,q}$ .
- En déduire que si  $\mathcal{L}$  est rationnel,  $\sqrt{\mathcal{L}}$  l'est aussi.
- Si  $\mathcal{L}$  est un langage, on définit  $\mathcal{L}^\square$  comme étant le langage des carrés contenus dans  $\mathcal{L}$  :

$$\mathcal{L}^\square = \{u \in \Sigma^* \mid \exists v \in \Sigma^*, u = vv \text{ et } u \in \mathcal{L}\}.$$

Est-ce que si  $\mathcal{L}$  est rationnel, alors  $\mathcal{L}^\square$  l'est aussi ?

**4**

Déterminer un automate déterministe équivalent à l'automate suivant :



**5**

Pour  $u = a_1 \dots a_n \in \Sigma^*$ , on appelle **miroir de  $u$** , noté  $\bar{u}$ , le mot  $\bar{u} = a_n a_{n-1} \dots a_1$ . On dit qu'un mot  $u$  est un **palindrome** si  $u = \bar{u}$ . On note  $\Pi \subset \Sigma^*$  l'ensemble des palindromes.

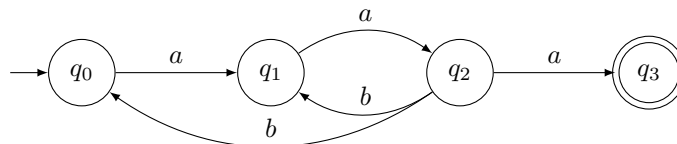
- Montrer que  $\Pi$  est rationnel si et seulement si  $|\Sigma| = 1$ .
- Soit  $L$  un langage rationnel.  $L \cap \Pi$  est-il rationnel ?
- Soit  $L$  un langage rationnel. Le langage  $\{u \in \Sigma^* \mid u\bar{u} \in L\}$  est-il rationnel ?

**6**

Déterminer un automate non déterministe qui reconnaît le langage  $\mathcal{L}(a^*(a|bb)^*b)$  en appliquant l'algorithme de Berry Sethi.

**7**

En appliquant l'algorithme d'élimination des états, déterminer une expression régulière dont l'interprétation est le langage reconnu par l'automate suivant :



**8**

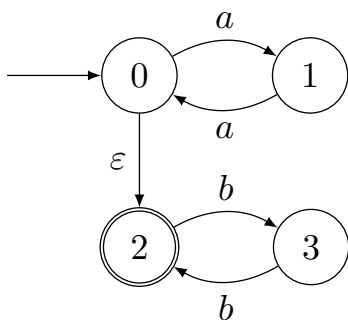
Soit  $\Sigma = \{a, b\}$ . Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $\Sigma^{<n}$  l'ensemble des mots de taille  $< n$ .

- Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\Sigma^{<n}$  est rationnel.

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on considère  $L_n = (\Sigma^{<n} a)^* \Sigma^n$ .

- Déterminer un automate non déterministe à  $n + 1$  états reconnaissant  $L_n$  (on pourra commencer par  $n = 1$ ,  $n = 2$ ,  $n = 3$ ).
- Montrer que si  $A$  est un automate déterministe complet reconnaissant  $L_n$ , alors il contient au moins  $2^n$  états.

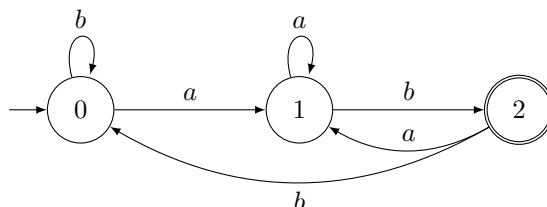
- 9** On considère le langage  $L_1 = \{a^n b^m : n \bmod 2 = m \bmod 2 = 0\}$ .  
On considère l'automate suivant :



1. Expliquer brièvement pourquoi il reconnaît  $L_1$ , le déterminer et le compléter. On note  $A_1$  l'automate obtenu.
2. A l'aide de l'algorithme de Berry-Sethi, construire un automate  $A_L$  reconnaissant le langage dénoté par l'expression  $(aa)^*(bb)^*$ .
3. Construire un automate  $A_{-1}$  reconnaissant le complémentaire de  $L_1$ .
4. Construire l'automate produit entre  $A_L$  et  $A_{-1}$ . Comment l'utiliser pour en déduire que  $L \subset L_1$  ?
5. Montrer que  $L = L_1$ .

**10**

1. (a) En appliquant l'algorithme de Berry-Sethi, construire un automate reconnaissant le langage  $L$  dénoté par  $(a + c)^*abb + (a + c)^*$ .  
(b) En déduire un automate reconnaissant  $L^c$ .
2. (a) En appliquant la méthode d'élimination des états et en supprimant les états par ordre croissant de numéro, donner une expression rationnelle pour le langage reconnu par l'automate suivant :



- (b) Donner une description simple des mots reconnus par cet automate et en déduire une autre expression rationnelle pour le langage qu'il reconnaît.

## 2 Grammaires

- 11** On considère la grammaire  $G$  suivante de symbole initial  $R$  :

$R \rightarrow XRX|S$

$S \rightarrow aTb|bTa$

$T \rightarrow XTX|X|\epsilon$

$X \rightarrow a|b$

Répondre aux questions suivantes :

1. Quels sont les symboles non terminaux de la grammaire  $G$  ?
2. Quels sont ses symboles terminaux ?
3. Donner trois mots engendrés par  $G$ .
4. Donner trois mots qui ne sont pas engendrés par  $G$ .
5. A-t-on  $T \Rightarrow aba$  ?
6. A-t-on  $T \Rightarrow^* aba$  ?
7. A-t-on  $T \Rightarrow T$  ?

8. A-t-on  $T \Rightarrow^* T$  ?
9. A-t-on  $XXX \Rightarrow^* aba$  ?
10. A-t-on  $X \Rightarrow^* aba$  ?
11. A-t-on  $T \Rightarrow^* XX$  ?
12. A-t-on  $T \Rightarrow^* XXX$  ?
13. A-t-on  $S \Rightarrow^* \epsilon$  ?
14. Donner une description de langage engendré par  $G$ .

**12** Trouver une grammaire qui engendre  $L$  décrit par  $a^*bc^*b$ .

**13**

On pose  $\Sigma = \{a, b\}$ .

1. Rappeler la définition d'un langage régulier.
2. Pour chacun des langages suivants, dessiner un automate le reconnaissant ou démontrer qu'il n'est pas régulier
  - (a)  $L_1 = \{a^n b^2 | n \in \mathbb{N}\}$
  - (b)  $L_2 = \{a^n b^{2n} | n \in \mathbb{N}\}$
  - (c)  $L_3 = \{uv | u, v \in \Sigma^*\}$
  - (d)  $L_4 = \{uu | u \in \Sigma^*\}$
3. Décrire simplement avec des mots le langage engendré par la grammaire non-contextuelle suivante, puis le décrire par une expression régulière :

$$S \rightarrow \varepsilon \mid aaaS$$

4. La grammaire non-contextuelle suivante est-elle ambiguë ?

$$E \rightarrow E + E \mid E \times E \mid (E) \mid 2$$

5. Proposer une grammaire non-contextuelle qui engendre  $\{a^n b^m c^{n+m} \mid n, m \in \mathbb{N}\}$ .

**14** Dans cet exercice, l'alphabet est  $\Sigma = \{a, b\}$ . On considère le langage  $L$  des mots dans le complémentaire de  $\{m \in \Sigma^* \mid \exists u \in \Sigma^*, m = uu\}$ .

1. Donner deux exemples de mots dans  $L$ , l'un de longueur 4, l'autre de longueur 5.
2. Montrer que tout mot de longueur impaire est dans  $L$  et que tout mot  $m_1 \dots m_{2n}$  de longueur paire appartient à  $L$  si et seulement si il existe un indice  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  tel que  $m_i \neq m_{n+i}$ .

On considère la grammaire algébrique  $G$  d'axiome  $S$  dont les règles sont :

$$\begin{aligned} S &\rightarrow A \mid B \mid AB \mid BA \\ A &\rightarrow a \mid aAa \mid aAb \mid bAa \mid bAb \\ B &\rightarrow b \mid aBa \mid aBb \mid bBa \mid bBb \end{aligned}$$

3. Décrire le langage  $L(G, A)$  (resp.  $L(G, B)$ ) des mots qu'il est possible de dériver à partir de  $A$  (resp.  $B$ ).
4. Montrer que tout mot de longueur impaire est dans  $L(G)$ .
5. Montrer que tout mot  $m \in L$  de longueur paire est dans  $L(G)$ .
6. Montrer que le langage  $L$  est algébrique.

**15** Donner une grammaire qui reconnaît le complémentaire de  $L$  décrit par  $\{a^n b^n : n \in \mathbb{N}\}$ .

**16** Soit  $G$  de symbole initial  $S$  décrite par :

$$S \rightarrow SS \mid T$$

$T \rightarrow aTb|ab$

Déterminer  $L(G)$  et montrer que  $G$  est ambiguë. Donner une grammaire non ambiguë  $H$  telle que  $L(G) = L(H)$ .

**17**

On pose  $L_a = \{uav \mid u, v \in \{a, b\}^*, |u| = |v|\}$  et  $L_b = \{ubv \mid u, v \in \{a, b\}^*, |u| = |v|\}$ . On pose également  $L = \{uv \mid u, v \in \{a, b\}^*, |u| = |v|, u \neq v\}$ .

1. Montrer que  $L = L_a L_b \cup L_b L_a$ .
2. En déduire que ces trois langages sont algébriques.

**18**

Pour  $L$  et  $M$  deux langages, on pose  $L/M = \{u \mid \exists v \in M, uv \in L\}$ .

1. Peut-on comparer  $(L/M)M$  et  $L$  dans le cas général ?
2. Montrer que si  $L$  est rationnel, alors  $L/M$  est rationnel.

**19**

Soit  $L$  un langage algébrique et  $R$  un langage rationnel sur  $\Sigma$ . On cherche à montrer que  $L \cap R$  est algébrique. Pour cela, on considère  $G = (\Sigma, V, P, S)$  une grammaire hors-contexte en forme normale de Chomsky et  $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$  un AFD tels que  $L = L(G)$  et  $R = L(A)$ .

Montrer qu'il existe  $G' = (\Sigma, V', P', S')$  une grammaire hors-contexte en forme normale de Chomsky telle que  $V' = Q \times V \times Q$  et  $L(G') = L \cap R$ .