

Partie I - Automates

1. $L_2(\mathcal{A}_{\{q_0\}})$ est le langage décrit par l'expression régulière b^*aa .
2. Les mots reconnus par l'automate $\mathcal{A}$ sont les étiquettes des calculs de la forme $q_0^k q_1 q_2^{k'}$, avec k et k' deux nombres entiers naturels non-nuls.
Les seuls calculs réussis au seuil 2 pour l'automate $\mathcal{A}_{q_1}$ sont les séquences :

$$q_0^k q_1 q_2^{k'}, \quad (k, k') \in \llbracket 1, 2 \rrbracket^2$$

On a donc :

$$L_2(\mathcal{A}_{q_1}) = \{aa, aab, baa, baab\}$$

3. La condition *iii*) de la définition 3 est vérifiée pour $\mathcal{A}_\emptyset$ pour un calcul dont l'étiquette est de longueur n , si et seulement si pour tout $i \in \mathbb{N}$, on a $i + s > n$, ce qui revient à $s > n$. $L_s(\mathcal{A}_\emptyset)$ est donc l'ensemble des mots acceptés par l'automate $\mathcal{A}$ de longueur strictement inférieure à s .

On a donc :

$$L_s(\mathcal{A}_\emptyset) = \{b^p aab^q, \quad (p, q) \in \mathbb{N}^2 \quad p + q + 2 < s\}$$

En particulier pour $s \in \llbracket 0, 2 \rrbracket$, $|L_s(\mathcal{A}_\emptyset)|$ et pour tout nombre entier s tel que $s > 2$:

$$|L_s(\mathcal{A}_\emptyset)| = |\{(p, q) \in \mathbb{N}^2, \quad p + q < s - 2\}| = \sum_{p=0}^{s-3} s - 2 - p = \sum_{p=1}^{s-2} p = \frac{(s-2)(s-1)}{2}$$

4. On revient au cas général

On ne peut répondre à la question qu'en l'interprétant. Une première interprétation consiste à penser que l'on majore le cardinal de l'ensemble des calculs réussis au seuil s ne passant par aucun état de O . La seconde consiste à penser que l'on majore l'ensemble des longueurs des mots reconnus par un calcul réussi au seuil s ne passant par aucun état de O . On propose une solution pour les deux interprétations, même si la seconde était sans doute celle à laquelle pensait le concepteur du sujet.

• Interprétation 1

Un majorant est le cardinal de l'ensemble des mots acceptés par $\mathcal{A}$ de longueur strictement inférieure à s , soit :

$$\sum_{k=0}^{s-1} |\Sigma|^k$$

c'est-à-dire s si $|\Sigma| = 1$, $\frac{|\Sigma|^s - 1}{|\Sigma| - 1}$ sinon.

• Interprétation 2

s est un majorant.

5. On a

- i) $i_0 \leq s$;
- ii) $\ell - s \leq i_k \leq \ell$;
- iii) Pour tout $j \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$:

$$i_{j+1} - i_j \leq s + 1$$

6. Pour $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, I, \delta, F)$, $O \subset Q$ et $s \in \mathbb{N}$, on considère l'automate $\mathcal{B} = (Q_B, \Sigma, \delta_B, F_B)$ défini par :

$$Q_B = Q \times \llbracket 0, s \rrbracket, \quad F_B = F \times \llbracket 0, s \rrbracket$$

et pour tout $(q, k) \in Q_B$ et pour tout $a \in \Sigma$:

- Si $k = s$ alors $\delta_B((q, s), a) = \emptyset$.
- Si $k \in \llbracket 0, s-1 \rrbracket$:

$$\delta_B((q, s), a) = (\delta(q, a) \cap O) \times \{0\} \cup (\delta(q, a) \setminus O) \times \{k+1\}$$

Le principe de construction de l'automate $\mathcal{B}$ consiste, dans un calcul, à incrémenter le compteur défini dans la deuxième composante des états de $\mathcal{B}$ tant que l'on n'a pas rencontré un état de l'ensemble O et transformer en état puits, tous les états atteints par un calcul de longueur s qui ne rencontre pas un état de O .

Par construction $\mathcal{B}$ reconnaît le langage $L_2(\mathcal{A}_O)$.