

① def inductive: $\emptyset \in \text{Reg}$

$\forall a \in \Sigma, \{a\} \in \text{Reg}$

si L_1 et L_2 st ds Reg alors: $L_1^* \in \text{Reg}$

$L_1 L_2 \in \text{Reg}$

$L_1 | L_2 \in \text{Reg}$

②

~~a) $L_1 = \mathcal{L}(a^* b^*)$ et~~

a) $L_1 = \mathcal{L}(a^* b a^*)$ est bien régulier

b) $L_2 = \{a^n b a^m \mid n, m \in \mathbb{N} \text{ et } n \leq m\}$ n'est pas régulier.

Utilisons la contraposée du lemme de l'étoile:

Soit $N \in \mathbb{N}$ quelconque.

Je pose $w = a^N b a^N \in L_2$ qui vérifie $|w| \geq N$.

Soit u, x, t une factorisation pcp de w telle que:

$$\begin{cases} w = uxt \\ x \neq \epsilon \\ |ux| \leq N \end{cases}$$

Dans ce cas, $\exists 0 \leq i < j \leq N$ t.q $u = a^i, x = a^j$
et $t = a^{N-i-j} b a^N$

Je pose $k = 2$ et on obtient que

$$u x^2 t = a^{i+2j+N-i-j} b a^N = a^{N+j} b a^N \notin L_2$$

$$\text{car } j \neq 0 \Rightarrow N+j > N$$

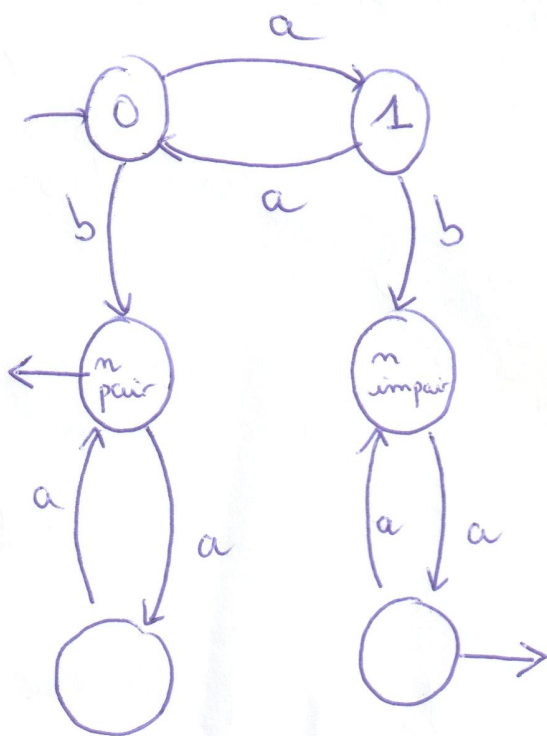
Ainsi, L_2 n'est pas régulier.

c) on peut réutiliser le lemme de l'étoile mais ce serait très redondant. Le raisonnement souhaitable est donc le suivant.

Supposons par l'absurde que L_3 est régulier alors comme L_1 est régulier, on aurait que:

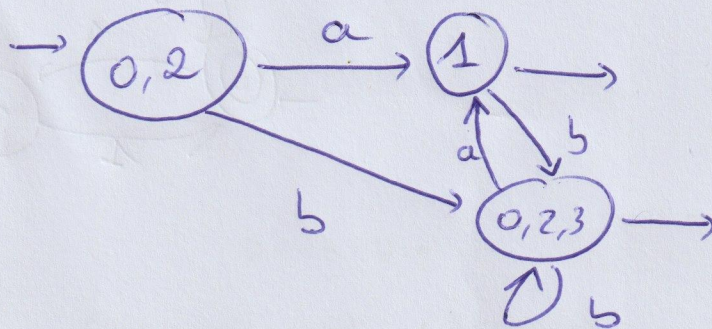
$L_1 \setminus L_3 = L_1 \cap L_3^c = L_2$ est régulière qui n'est pas le cas.

d) Le langage est régulier car reconnu par l'automate suivant:

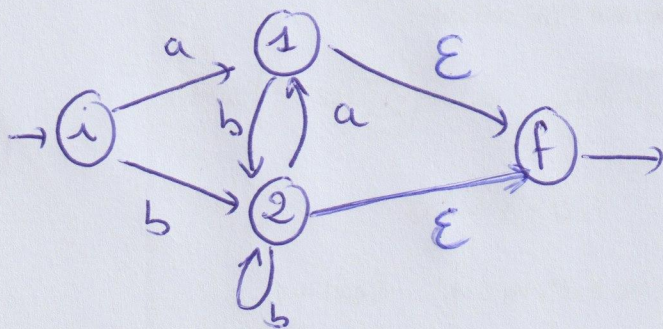


$n + m \equiv 0 \pmod{2}$
signifie que n et m ont la même parité.

③ a)

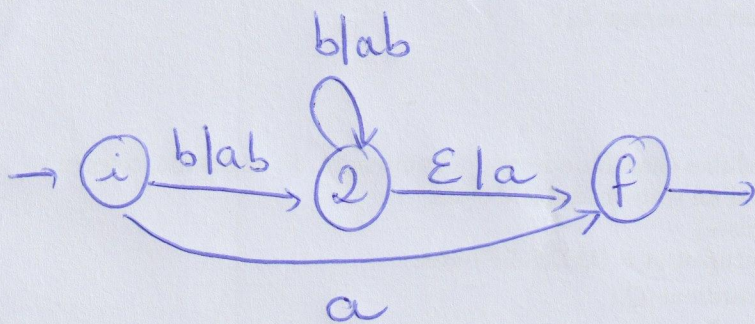


b) Standardisation pour élimination des états



élimination de 1

e	S
i	f
2	2



élimination de 2

