

Le volant d'inertie

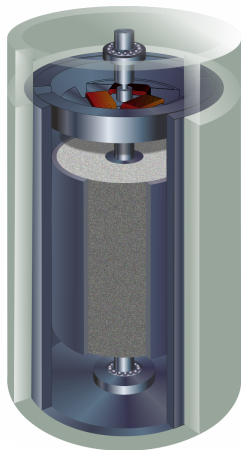
Nicolas DAMAGEUX

Numéro de candidat : 32969

Session 2021

Le volant d'inertie

Premiers principes



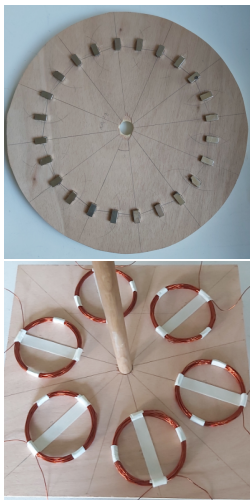
- Énergie cinétique \leftrightarrow Énergie électrique
- Masse importante (en industrie : acier, béton...)
- Enceinte étanche \Rightarrow réduction des frottements
- Conversion grâce à l'induction

Sommaire

- 1 Expérimentation et résultats
- 2 Application au Gyrobus
- 3 Ouverture : l'effet gyroscopique
- 4 Conclusion
- 5 Annexes

Modélisation et mesures

La maquette :



Le rotor $M = 1,20 \text{ kg}$:

- Bois
- 40 cm de diamètre, 1,7 cm d'épaisseur
- 24 aimants plats alternés

Le stator :

- $N_{bob} = 6$ bobines (cuivre)
- Epaisseur : $l = 1 \text{ cm}$
- $N = 25$ spires
 $\Rightarrow n = \frac{N}{l} = 2500$ spires. m^{-1}

Les frottements

Utilisation d'un roulement à billes

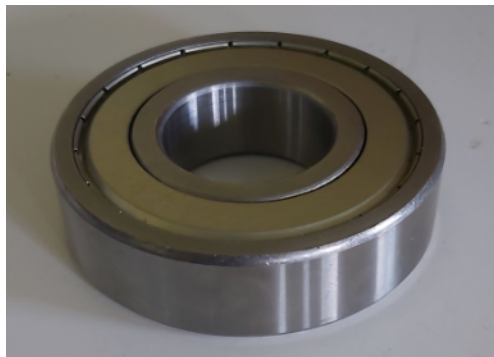


FIGURE – Roulement à bille utilisé

⇒ Seuls les frottements bois/air seront pris en compte.

Modélisation et mesures pour une bobine

Les résultats :

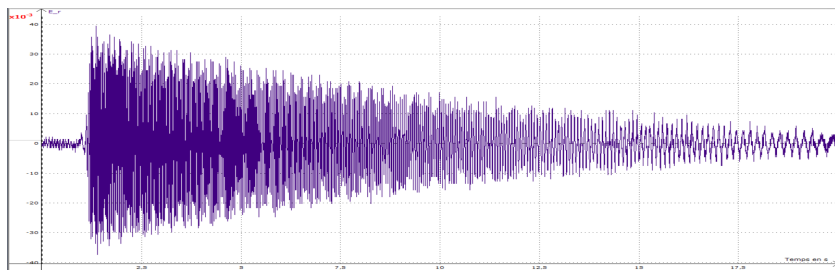


FIGURE – Tension mesurée ($\omega_0 = 26 \text{ rad.s}^{-1}$)

- Amplitude initiale $E_m = 36 \text{ mV}$
- Amplitude en valeur absolue : décroissance exponentielle
- Pulsation : fonction décroissante du temps
- Courant initial : $I_m = 230 \text{ mA}$

Théorie

Etude du champ magnétique

- Géométrie du système :

$$\beta = 12 \text{ couples d'aimants}$$

- Relation $\omega(t)$ - pulsation champ magnétique :

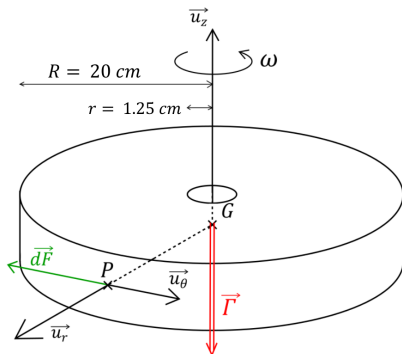
$$\omega_B(t) = \beta\omega(t)$$

- On en déduit :

$$\boxed{B(t) = B_0 \cos(\beta\omega(t)t)} \text{ avec } B_0 = 15 \text{ mH}$$

Modélisation

Etude mécanique



- Moment d'inertie :

$$C = \frac{1}{2}M(R^2 + r^2)$$

- Force de frottements fluides :

$$d\vec{F} = -k_s dS \vec{v}$$

- Couple de frottements :

$$\vec{\Gamma} = -\pi k_s \omega(t) K \vec{u}_z$$

- Vitesse de rotation :

$$\omega(t) = \omega_0 e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad \tau = \frac{C}{K\pi k_s}$$

Tension théorique aux bornes d'une bobine

Principe d'induction et calculs

- Flux de $B(t)$ à travers une bobine :

$$\phi = \iint \vec{B}(t) \cdot d\vec{S} = B(t)\pi R^2 = B_0\pi R^2 \cos(\beta\omega(t)t)$$

- Loi de Lenz-Faraday :

$$E_t = -\frac{d\phi}{dt}$$

- Tension induite théorique :

$$E_t(t) = \pi R^2 B_0 \beta \omega(t) \left(\frac{t}{\tau} - 1 \right) \sin(\beta\omega(t)t)$$

- D'après les différentes mesures :

$$\tau = 21 \text{ s} \Rightarrow k_s = 0,193 \text{ kg.m}^{-2}.\text{s}^{-1}$$

Comparaison Théorie / Pratique

La tension aux bornes d'une bobine :

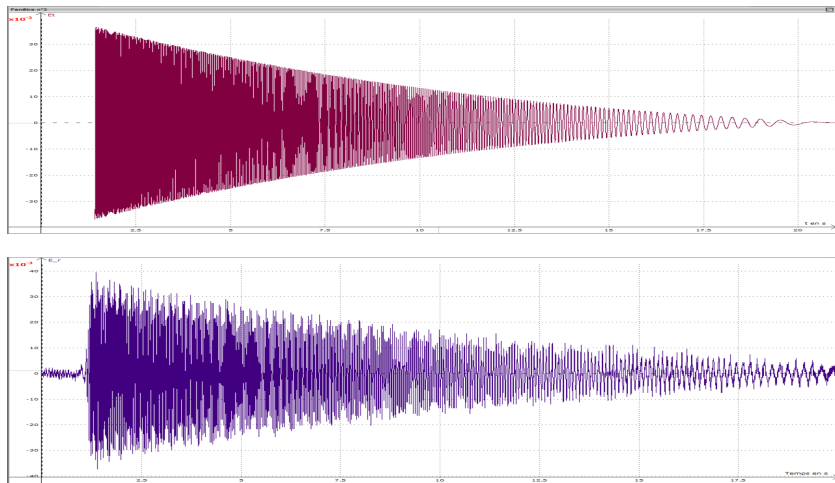


FIGURE – Tension théorique (haut)/réelle (bas) ($\omega_0 = 26 \text{ rad.s}^{-1}$)

Le courant induit

Théorie

- Résistance et inductance :

$$R_{bob} = \frac{e}{\gamma S} = 1,94 \cdot 10^{-8} \Omega \text{ et } L = n^2 l \mu_0^2 = 7 \text{ mH}$$

- Relation courant/tension (valable à basse pulsation) :

$$E_t(t) = (R_{bob} + jL\omega(t)).I(t)$$

- On en déduit le courant :

$$I(t) = \frac{\beta \pi R^2 B_0 \omega(t) \left| \frac{t}{\tau} - 1 \right| \cdot |\cos(\beta \omega(t) \cdot t)|}{\sqrt{R_{bob}^2 + L^2 \omega(t)^2}} \cos \left(\arctan \left(\frac{L \omega(t)}{R_{bob}} \right) t \right)$$

Le courant induit

Courbe avec vitesse variable

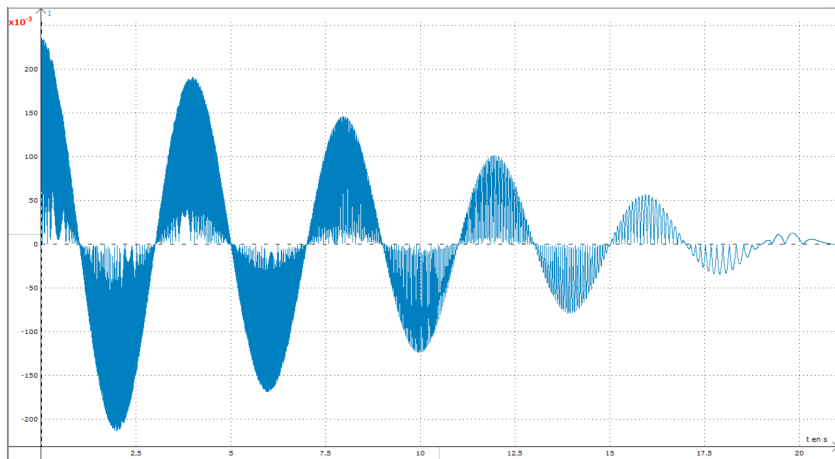


FIGURE – Courant en fonction du temps ($\omega_0 = 26 \text{ rad.s}^{-1}$)

Le courant induit

Premières observations

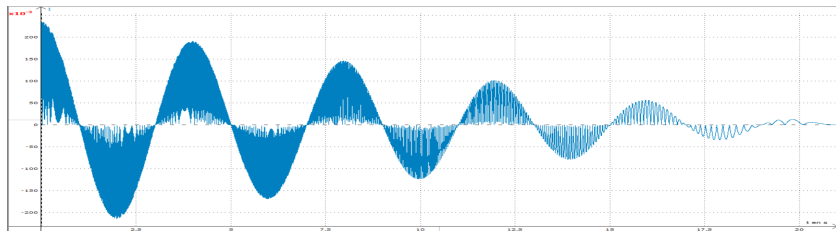


FIGURE – Courant en fonction du temps ($\omega_0 = 26 \text{ rad.s}^{-1}$)

- Mesure : $I_m = 230 \text{ mA}$ Théorie : $I = 236 \text{ mA} \Rightarrow 2.6\%$ d'erreur relative.
- Enveloppe : Amplitude = $f(\omega)$
- Signal haute fréquence : Pulsation = $f(\omega)$
- Décroissance avec ω

Le courant induit

Courbe avec vitesse constante

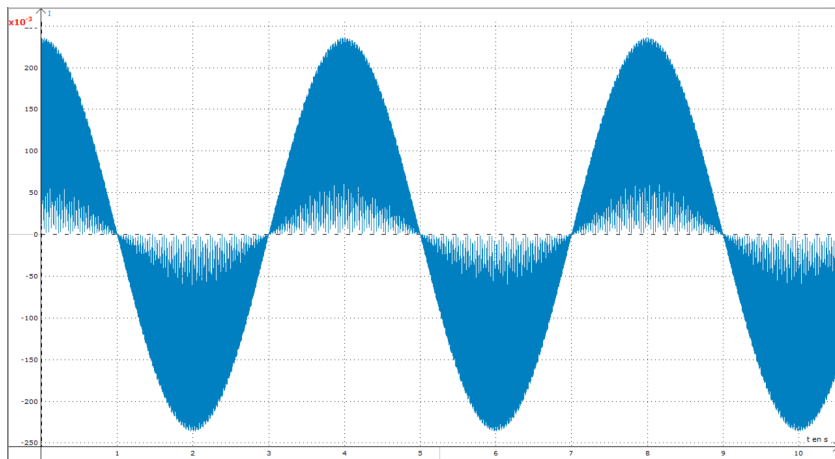
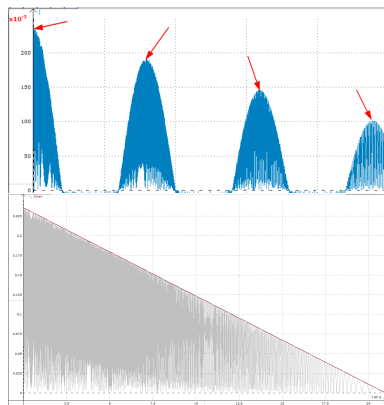


FIGURE – Courant en fonction du temps ($\omega_0 = 26 \text{ rad.s}^{-1}$)

Dépendance avec la vitesse de rotation

Introduction du courant maximum



- $R_{bob} \ll L.\omega(t)$
- Donc :

$$I_{max}(t) = \frac{\beta\pi B_0 R^2}{L} \left(1 + \ln \left(\frac{\omega(t)}{\omega_0} \right) \right)$$

Rendement

Formule et courbe

- Energies cinétique et électrique :

$$E_c = \frac{1}{2}C\omega(t)^2 \text{ et } E_{bob} = N_{bob}\frac{1}{2}LI_{max}^2$$

- Le rendement :

$$\eta = \frac{E_{bob}}{E_{cin}} = \frac{N_{bob} \left(\beta\pi B_0 R^2 \left(1 + \ln \left(\frac{\omega(t)}{\omega_0} \right) \right) \right)^2}{LC\omega(t)^2}$$

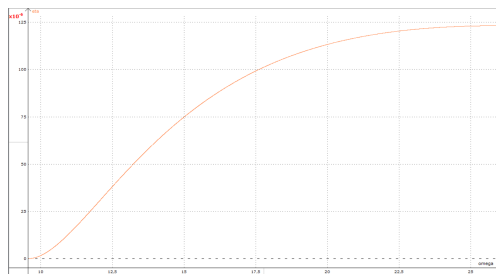


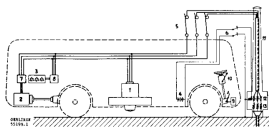
FIGURE – Rendement en fonction de la vitesse de rotation ▶

Qu'est-ce que le gyrobus ?

Principe de fonctionnement :



- Alimentation : volant d'inertie
- Tension nécessaire : $U = 400\text{ V}$ (valeurs actuelles)



Tension récupérée

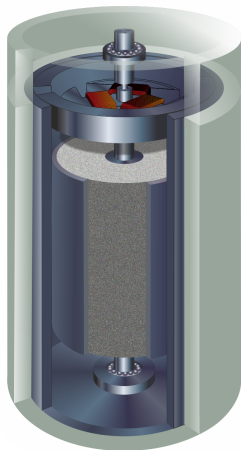
Etude à vitesse constante

- Cadre : vitesse constante
 - \emptyset frottements
 - \emptyset interventions masse/moment d'inertie
- Donc :

$$E(t) = \underbrace{N_{bob}\beta B_0\pi R^2\omega_0}_{E_m} \sin(\beta\omega_0 t)$$

Nouveau contexte

⇒ adapter la formule au contexte industriel :



- On a toujours :

$$E_m = N_{bob} \beta B_0 \pi R^2 \omega_0$$

- Cette fois-ci avec :

$$\rightarrow N_{bob} = 3$$

$$\rightarrow \beta = 3$$

$$\rightarrow R = 0,2 \text{ m}$$

Choix de la vitesse de rotation

Tracé de $\omega_0 = f(E_m, B_0)$

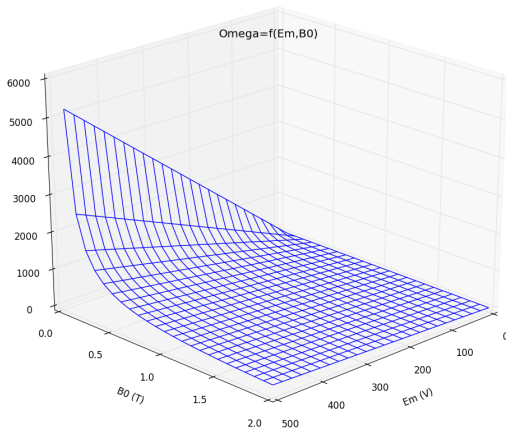


FIGURE – $\omega_0 = f(E_m, B_0)$

L'effet gyroscopique

Etude sommaire :

Système :

- Bus dans un virage

Référentiel :

- R_{bus} : non galiléen \Rightarrow apparition d'une force centrifuge \Rightarrow décollement

$$\vec{\Gamma} = C \vec{\Omega}(gyr/bus) \wedge \vec{\Omega}(bus/R_{ter})$$

Conclusion : retour sur observations

E_t	I_{max}	η	E	Effet gyr.
$B_0 \nearrow$ $\omega(t) \nearrow$	$B_0 \nearrow$ $\omega(t) \nearrow$	$B_0 \nearrow$ $\omega(t) \nearrow$ $C(M) \searrow$	$B_0 \nearrow$ $\omega(t) \nearrow$	$\omega(t) \searrow$

- Maximiser le champ magnétique
- Utiliser des matériaux plus légers
- Compromis pour la vitesse de rotation

Axes d'études possibles

- Tester les 6 bobines en même temps
- Varier les caractéristiques du rotor (matériaux, dimensions,...)
- Varier les caractéristiques des bobines (N , l)

Etude mécanique du rotor

Détermination de $\omega(t)$ et K

- Force :

$$d\vec{F} = -k_s dS \vec{v}$$

- Couples :

$$\vec{\Gamma}_f = -\pi k_s (R^4 - r^4) \omega(t) \vec{u}_z \quad \text{et} \quad \vec{\Gamma}_e = -2.\pi k_s R^3 e \omega(t) \vec{u}_z$$

- Théorème du moment cinétique :

$$C. \frac{d\omega(t)}{dt} = -\pi k_s \omega(t) \underbrace{(R^4 - r^4 + 2R^3 e)}_K$$

$$\boxed{\frac{d\omega(t)}{dt} + \frac{1}{\tau} \omega(t) = 0 \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{C}{K\pi k_s}}$$

Code pour tracer $\omega_0 = f(E_m, B_0)$

```

1  import numpy as np
2  import matplotlib.pyplot as plt
3  from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
4
5  n = 25
6  VEm = np.linspace(0, 500, n)
7  VB0 = np.linspace(0, 2, n)
8  Em,B0 = np.meshgrid(VEm, VB0)
9
10 Nbob = 3
11 beta = 3
12 R = 0.2
13 A = Nbob*beta*np.pi*R**2
14
15 def omega0(Em,B0):
16     return (1/A)*(Em/B0)
17
18 Omega = omega0(Em,B0)
19 fig = plt.figure()
20 ax = plt.axes(projection='3d')
21 ax.view_init(30, 40)
22 ax.plot_wireframe(Em, B0, Omega)
23 plt.show()

```