BERTIN
Clément

Méthodes de détermination des enveloppes convexes

Plan

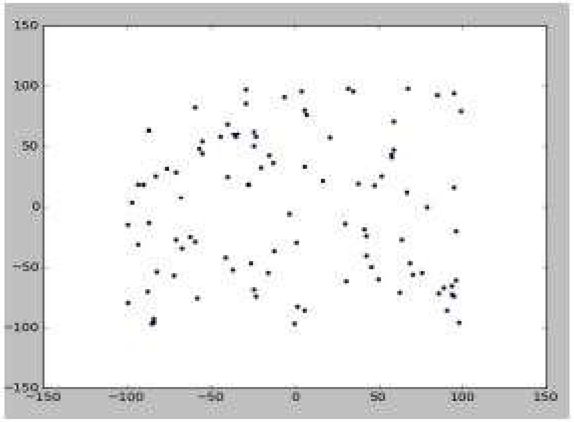
→ Présentation du problème

→ Cas Bidimensionnel

→ Cas Tridimensionnel

→ Algorithme optimal

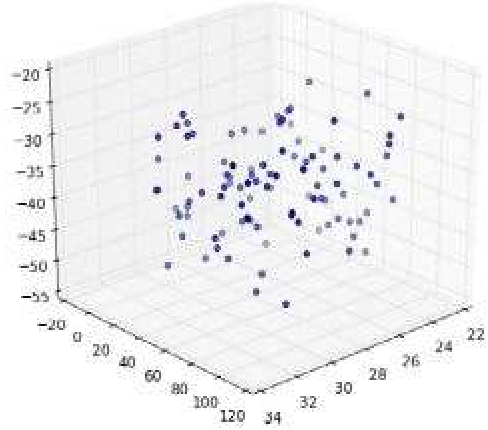
Définitions, propriétés et utilisations

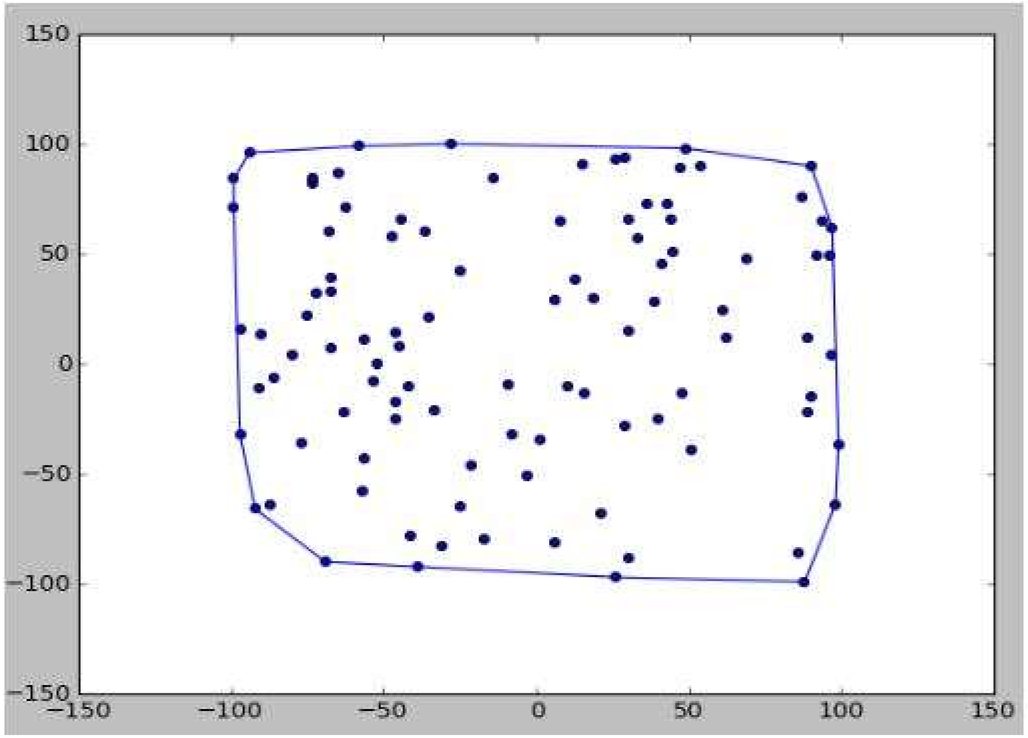


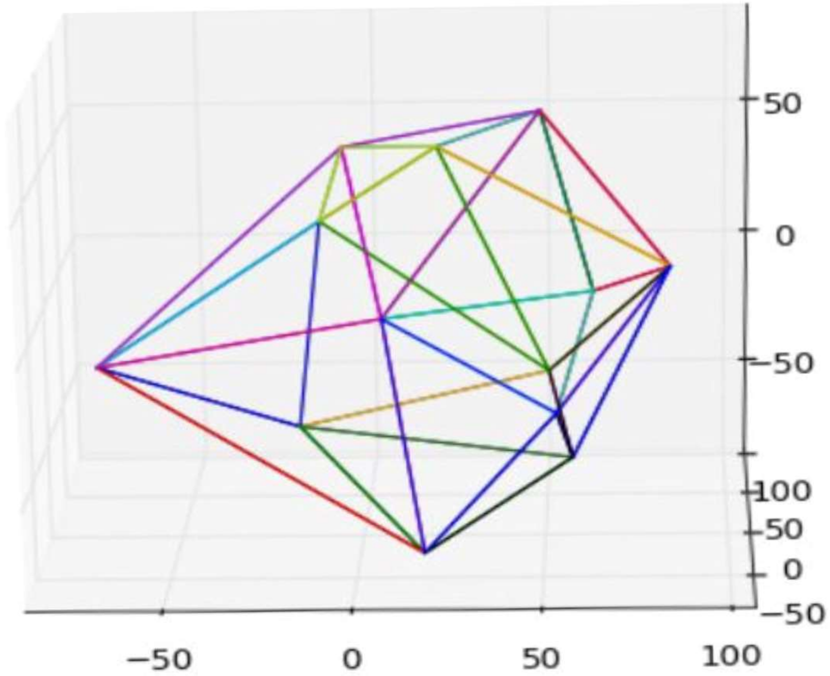
Nuage de points

Enveloppe convexe

Complexité

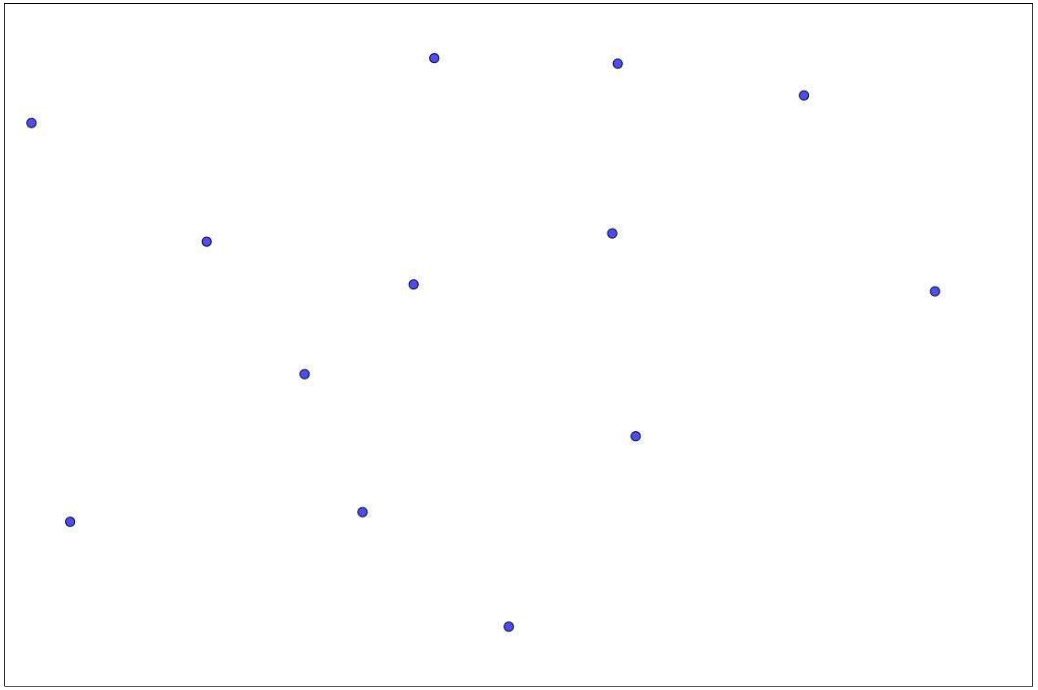






I) Cas bidimensionnel

→ Modélisation : ([[abscisses], [ordonnées]])



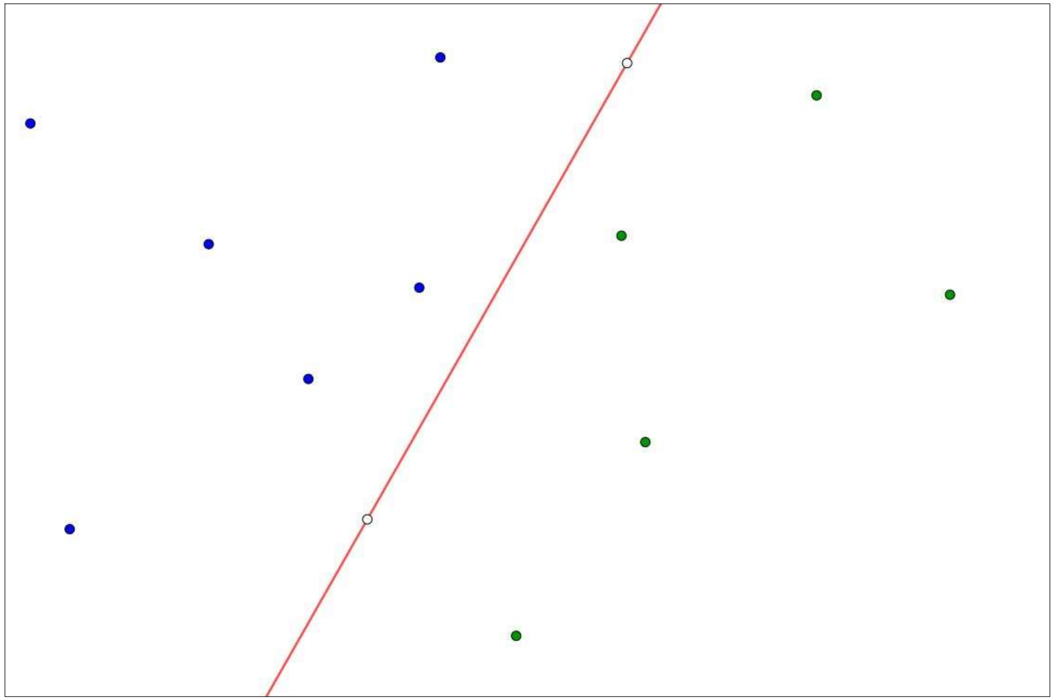
→ Approche naïve

→ Marche de JARVIS

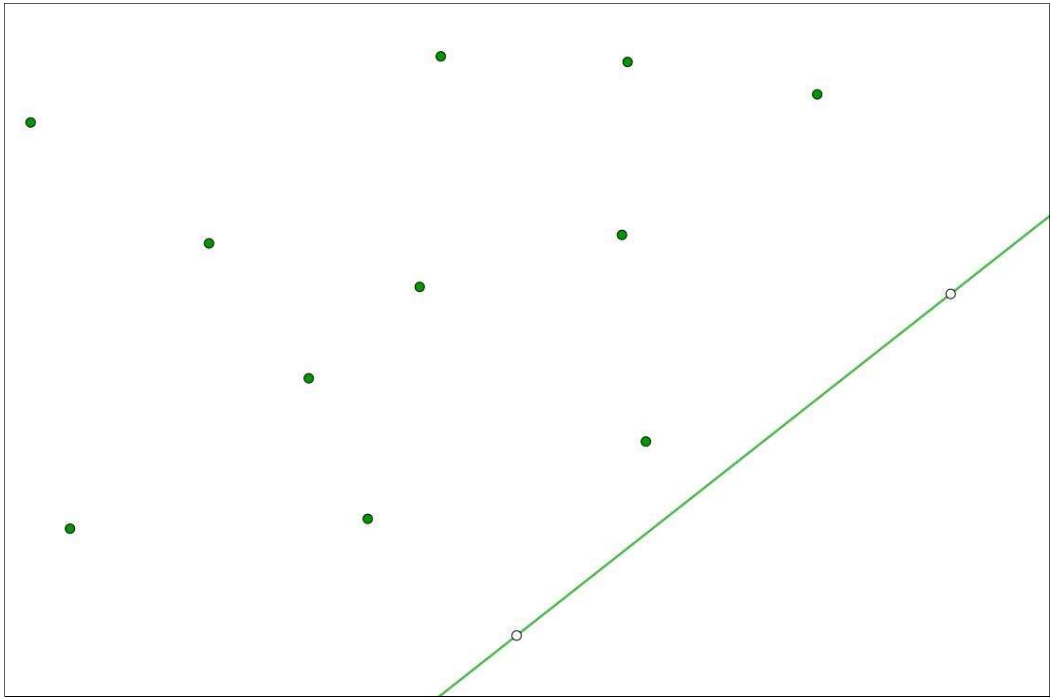
→ Parcours de GRAHAM

Approche naïve

tester (liste, point, point) → booléen



Le test est faux

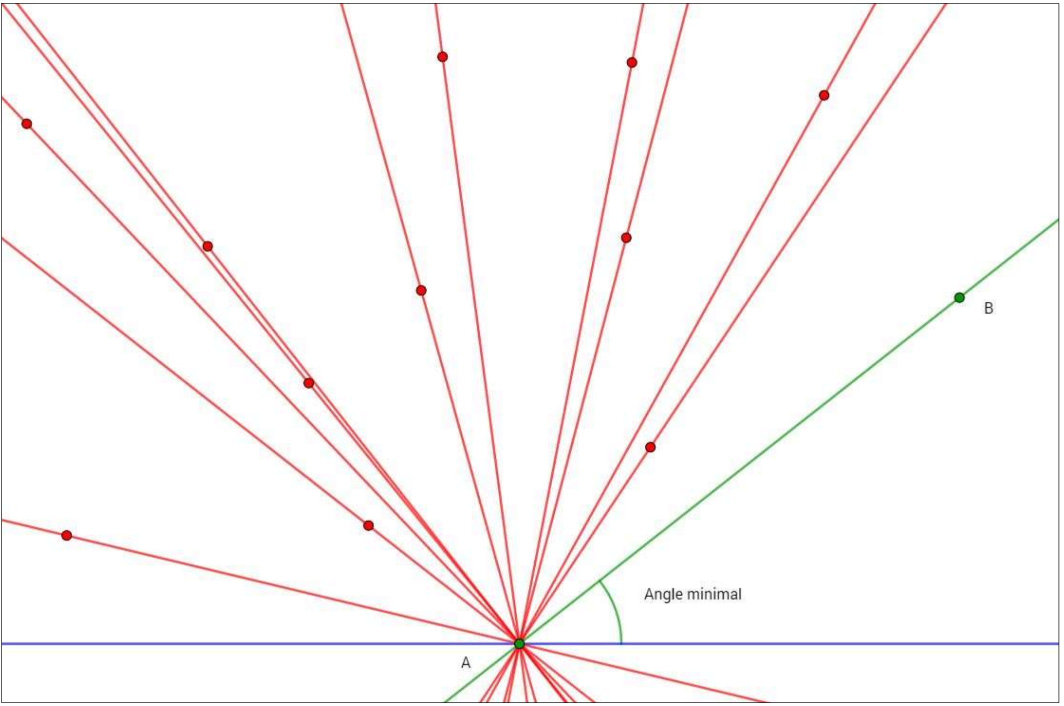


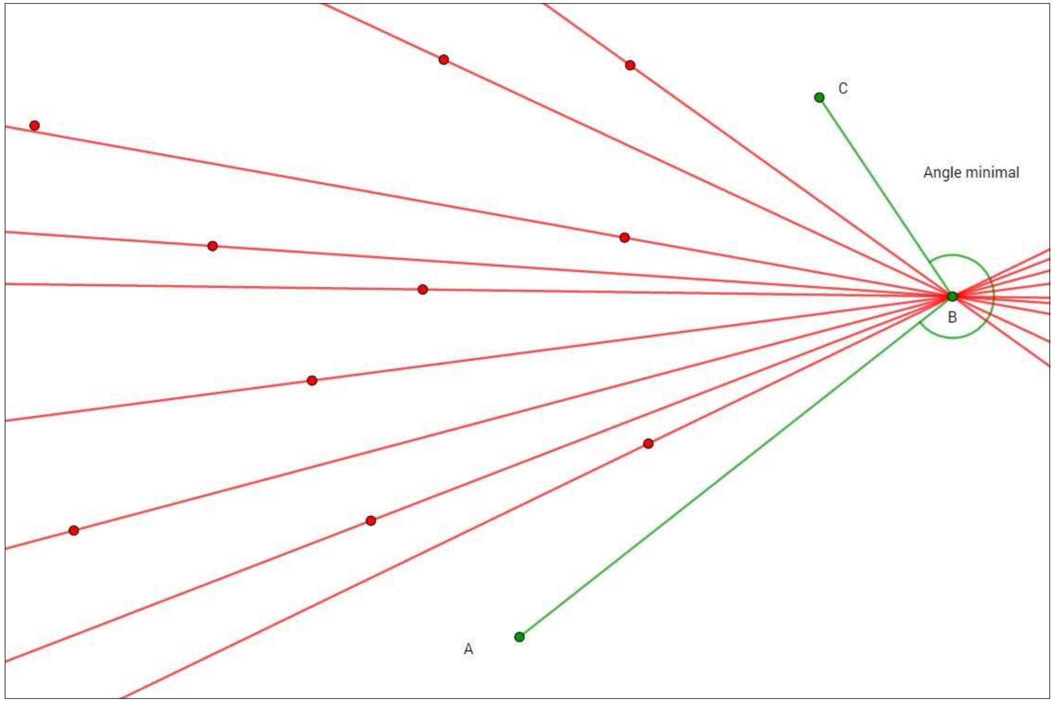
Le test est vrai

$C = \Theta(n^3)$ n = nombre de points du nuage

Marche de JARVIS

prochainPoint (liste, indice, indice) → int

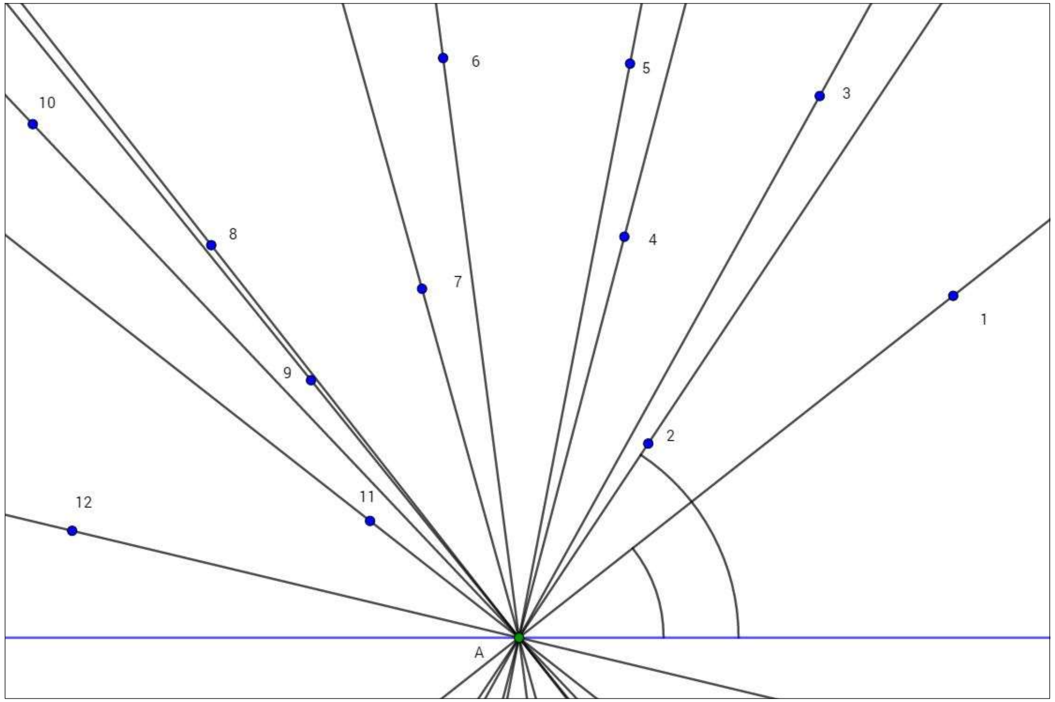




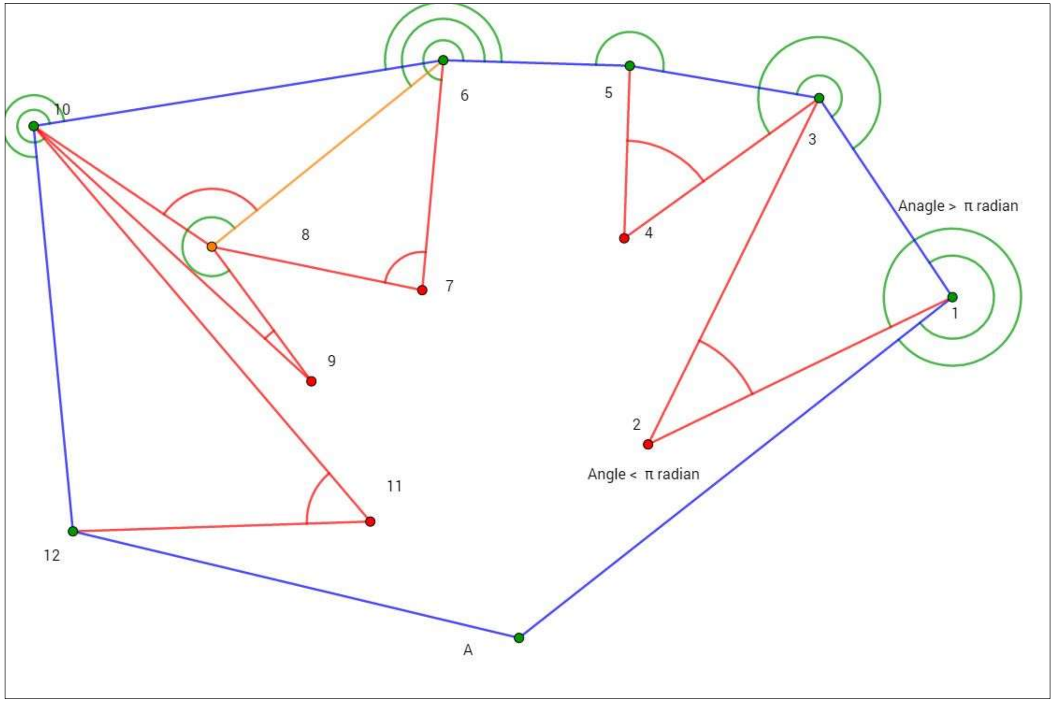
C = $\Theta(n \cdot m)$

n = nombre de points du nuage
m = nombre de sommets de l'enveloppe

Parcours de GRAHAM



→ Point le plus « bas »
→ Tri par rapport à l'angle



→ Correction par parcours de la liste

C =Θ $(n \cdot \log(n))$ n = nombre de points du nuage

II) Cas tridimensionnel

→ Modélisation :

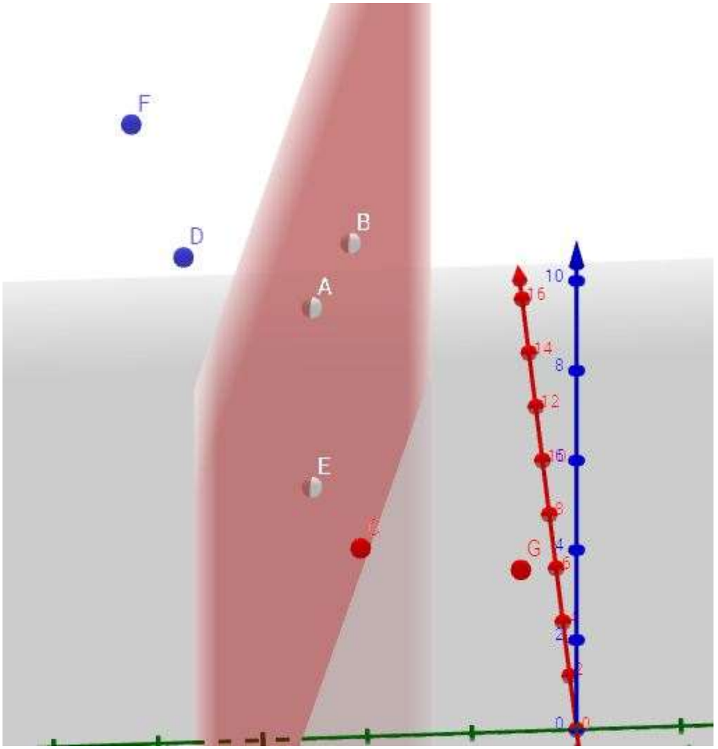
([[abscisses], [ordonnées], [hauteurs]])

→ Approche naïve

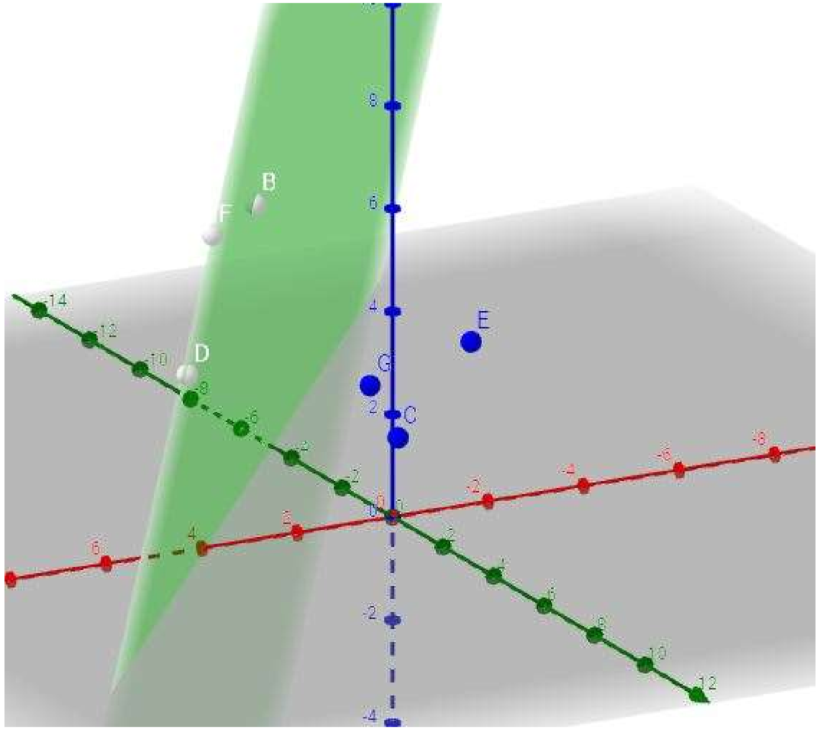
→ Équivalent tridimensionnel de la marche de JARVIS

Approche tridimensionnelle naïve

Appartient (liste, point, point, point) → booléen



Le plan n’appartient pas à l’enveloppe convexe



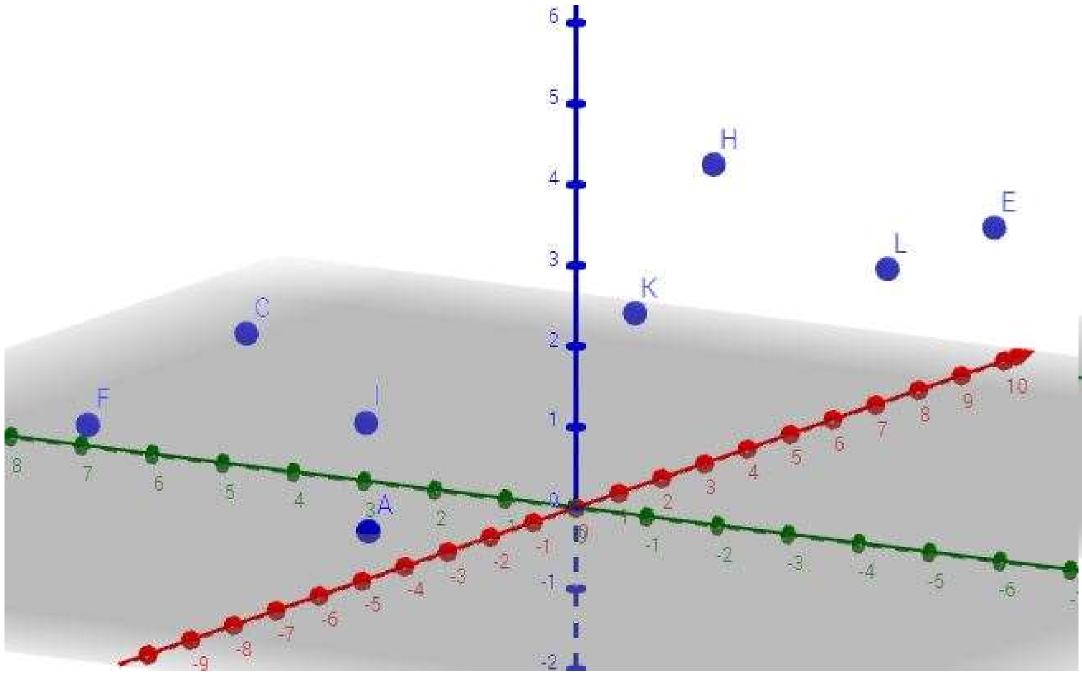
Le plan appartient à l’enveloppe convexe

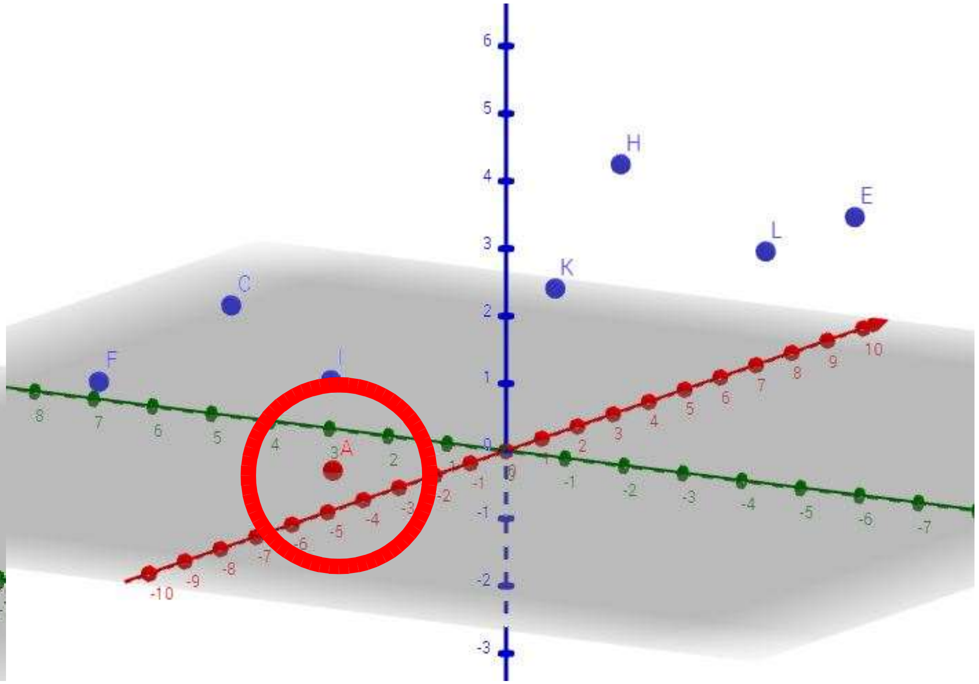
$C = \Theta(n^4)$ n = nombre de points du nuage

Équivalent de la marche de JARVIS

Première face :

→ Point le plus bas, A



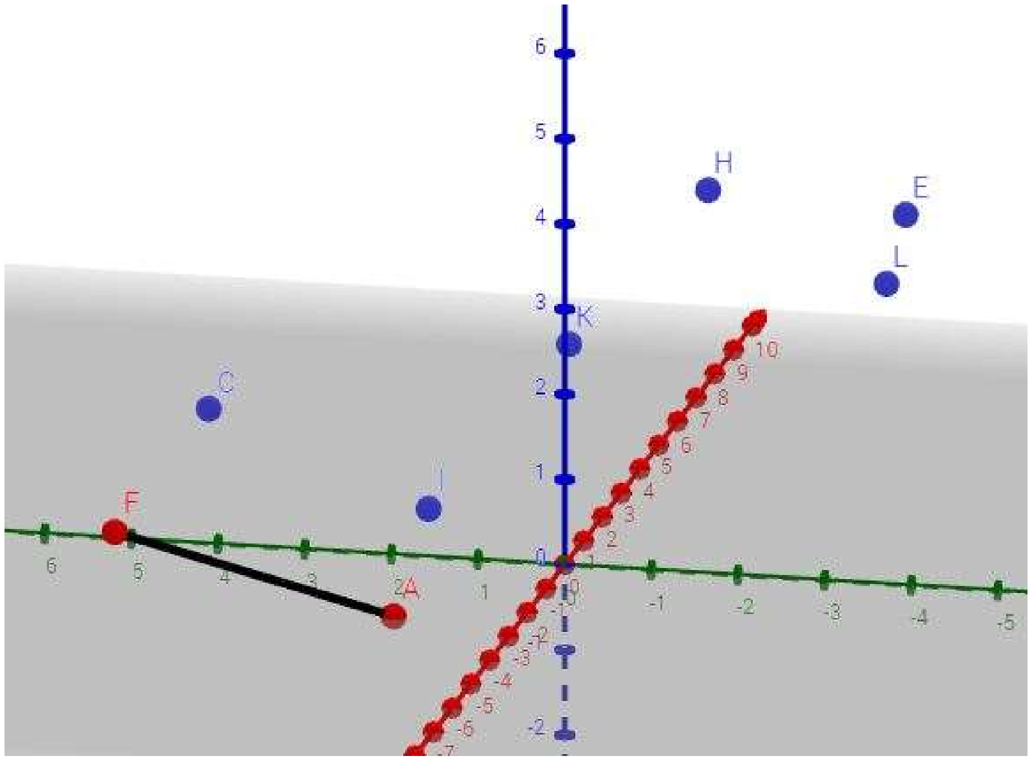


Équivalent de la marche de JARVIS

Première face :

→ Point le plus bas, A

→ Point minimisant l’angle avec A, F



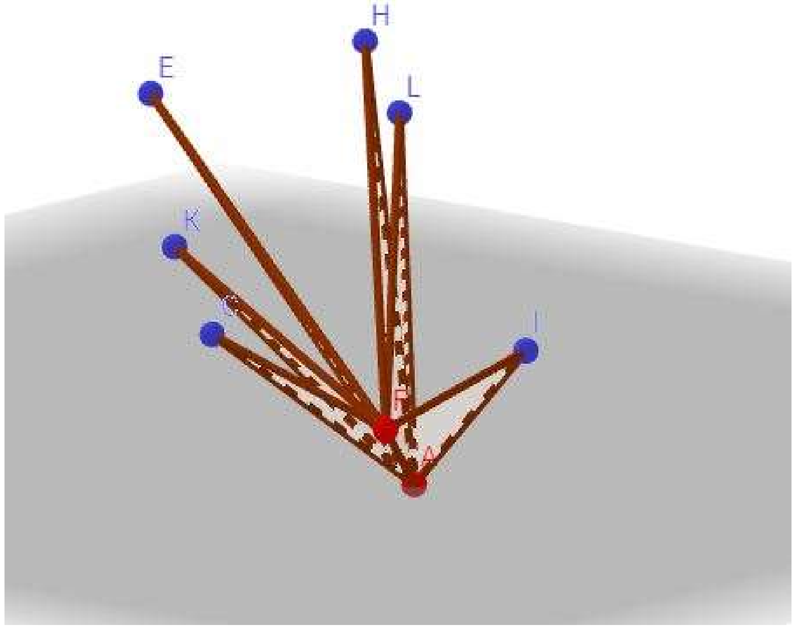
Équivalent de la marche de JARVIS

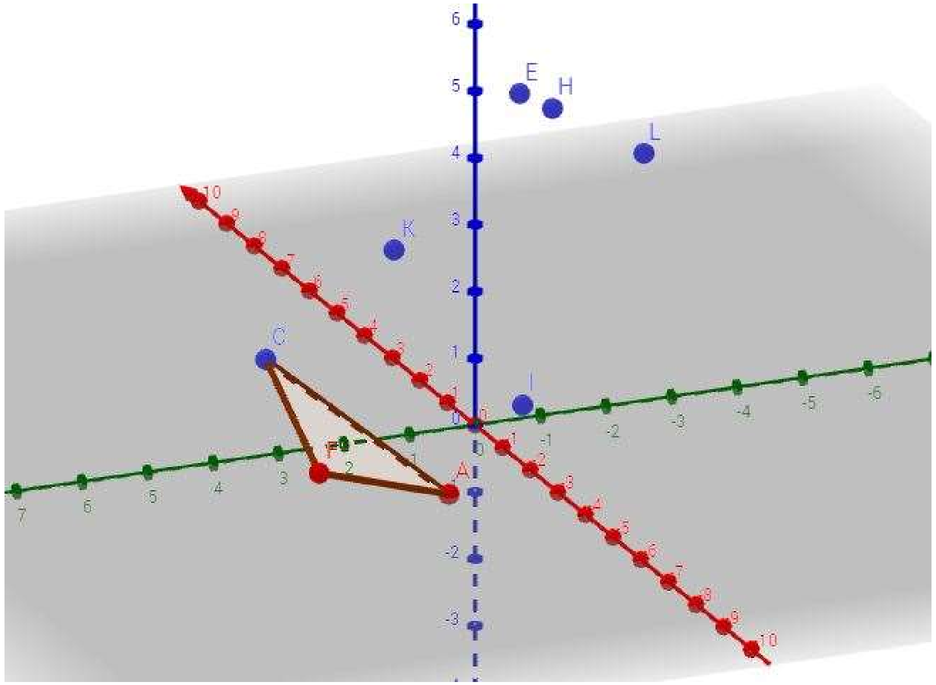
Première face :

→ Point le plus bas, A

→ Point minimisant l’angle avec A, F

→ Point minimisant l’angle de la face par rapport à z = 0, C

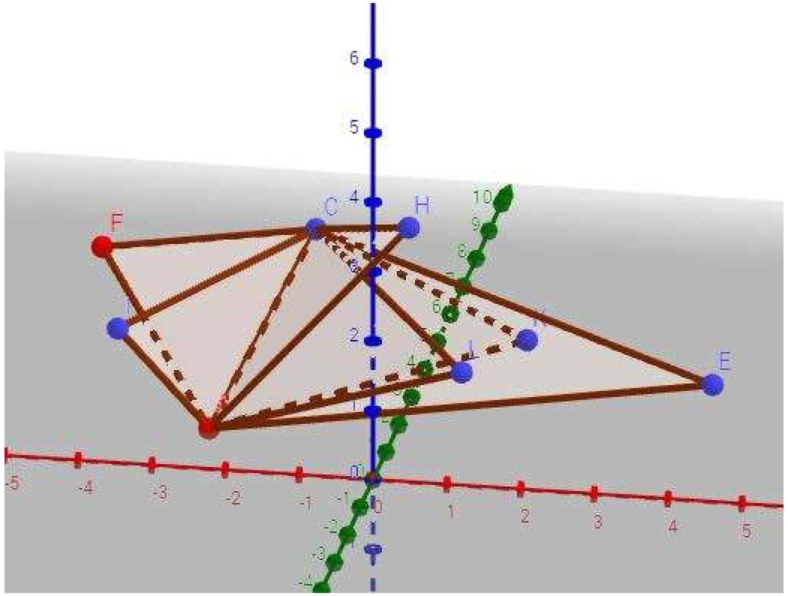


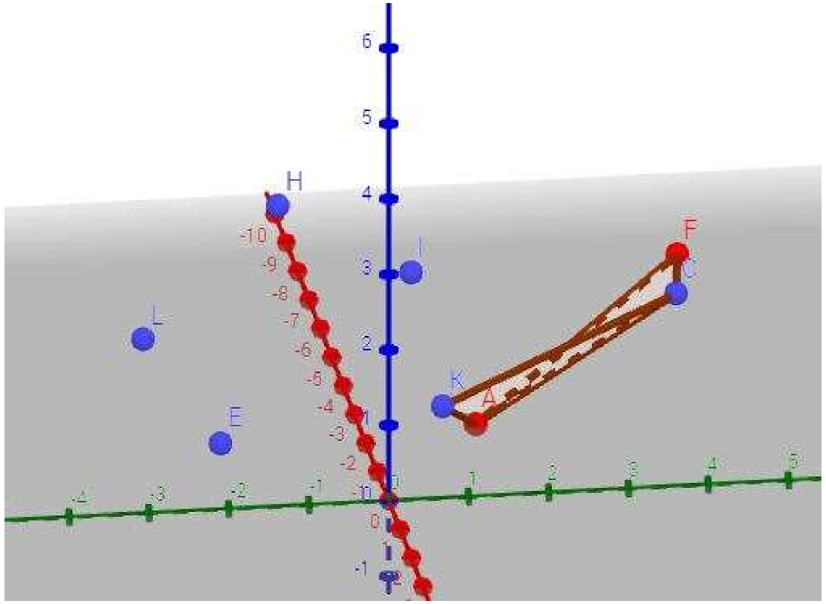


Équivalent de la marche de JARVIS

Algorithme général :

→ Maximisation de l’angle d’ouverture avec la face précédente



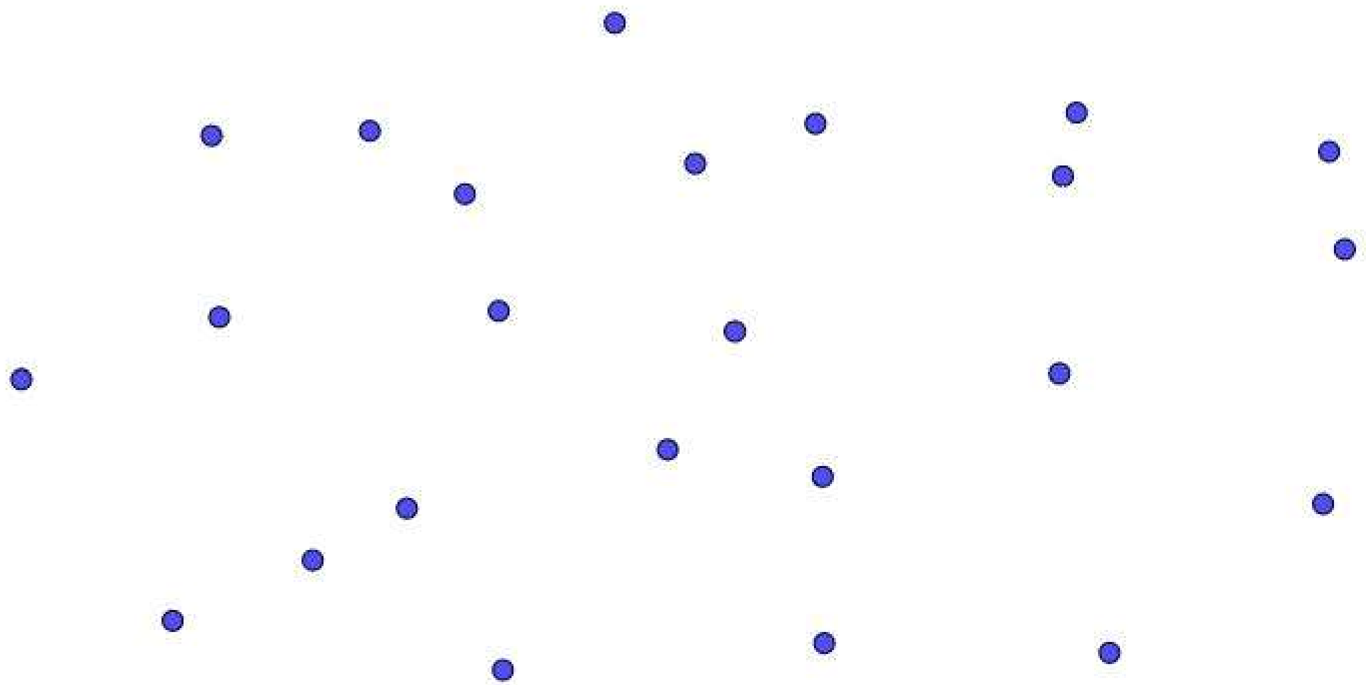


$C = \Theta(n \cdot m)$

n est le nombre de points du nuage
m est le nombre de faces de l'enveloppe

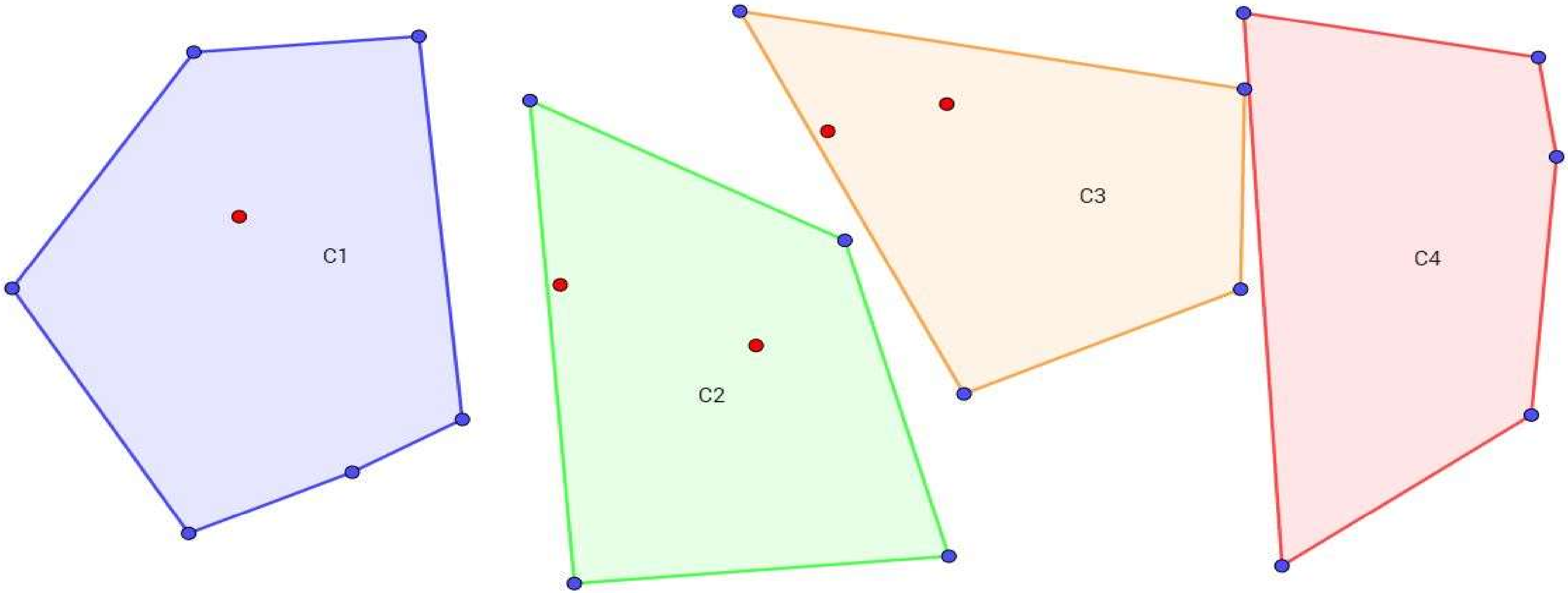
III) Méthode optimale : Méthode de CHAN

A) Cas Bidimensionnel :



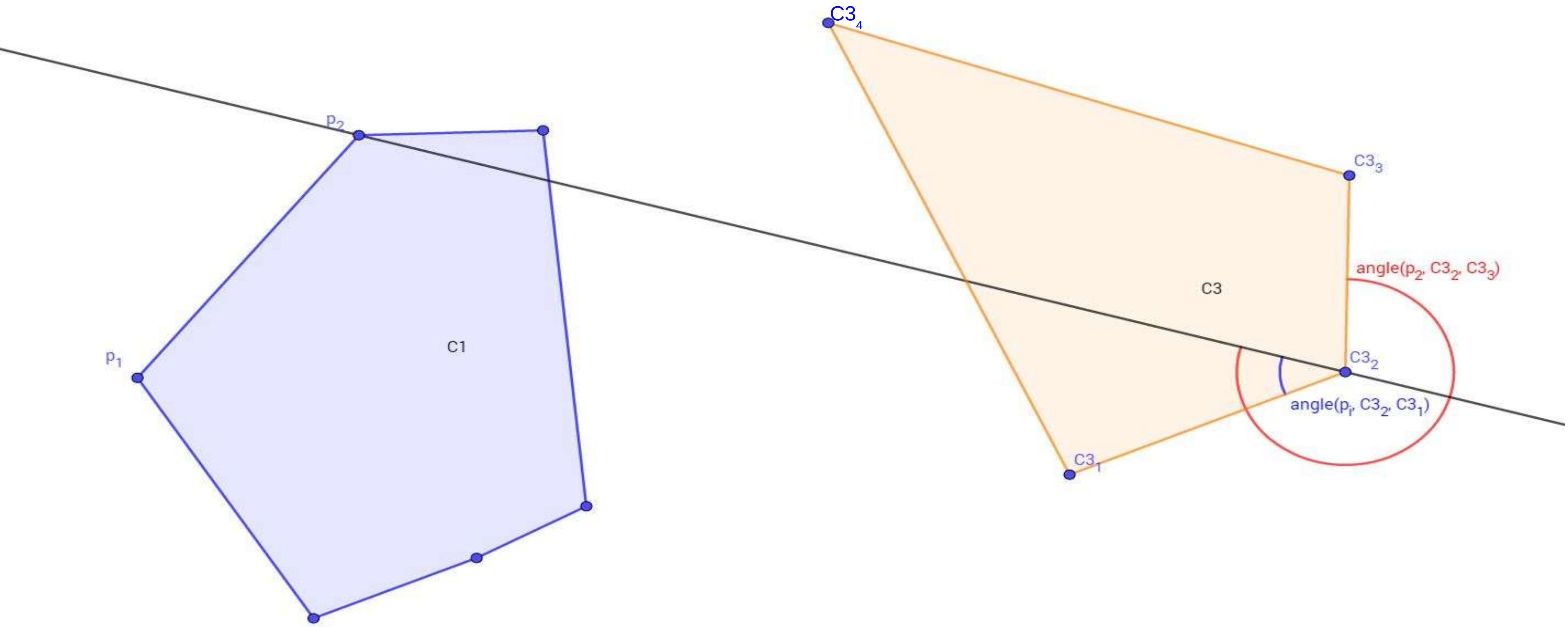
III) Méthode optimale : Méthode de CHAN

A) Cas Bidimensionnel :



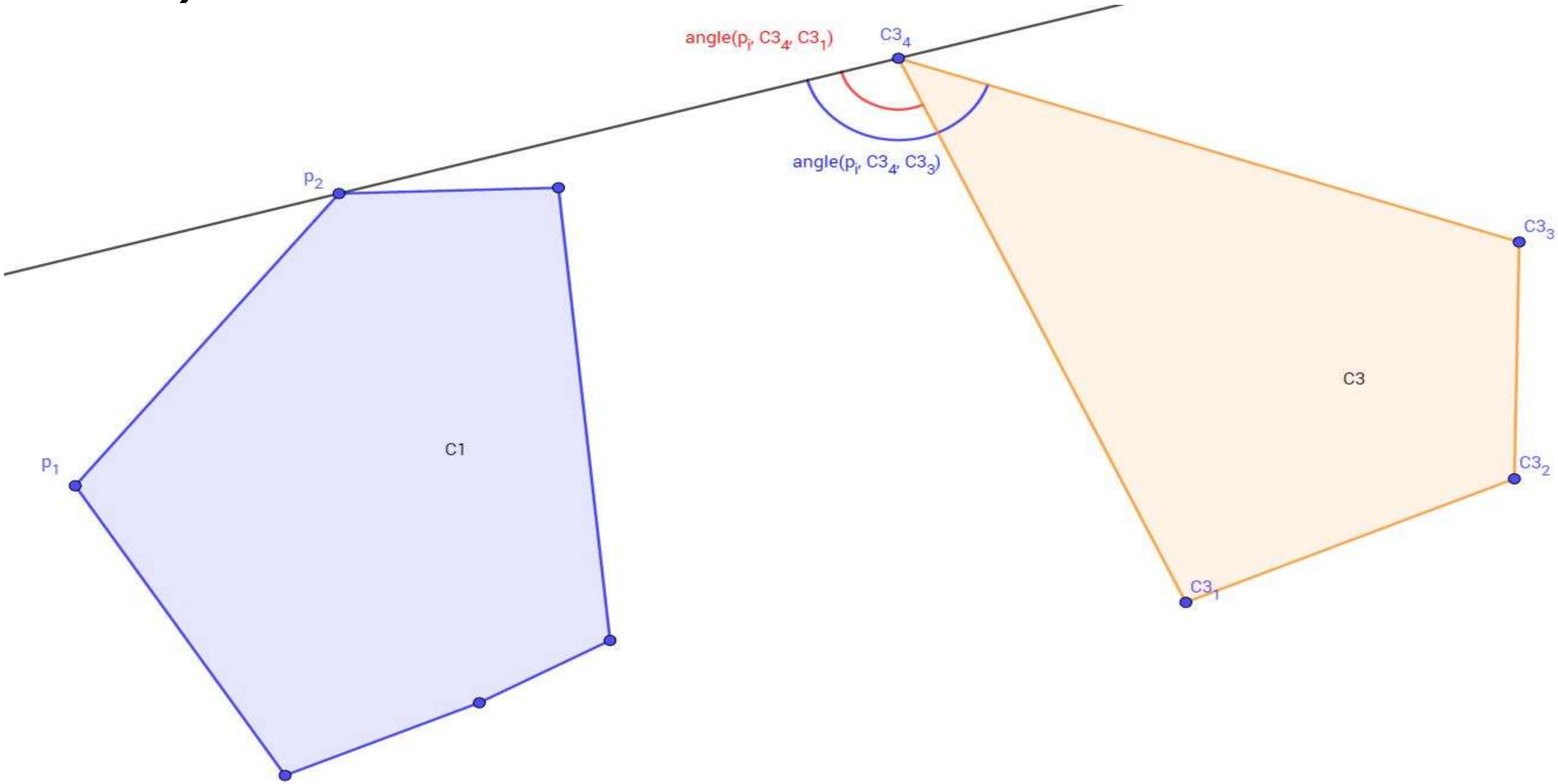
III) Méthode optimale : Méthode de CHAN

A) Cas Bidimensionnel :



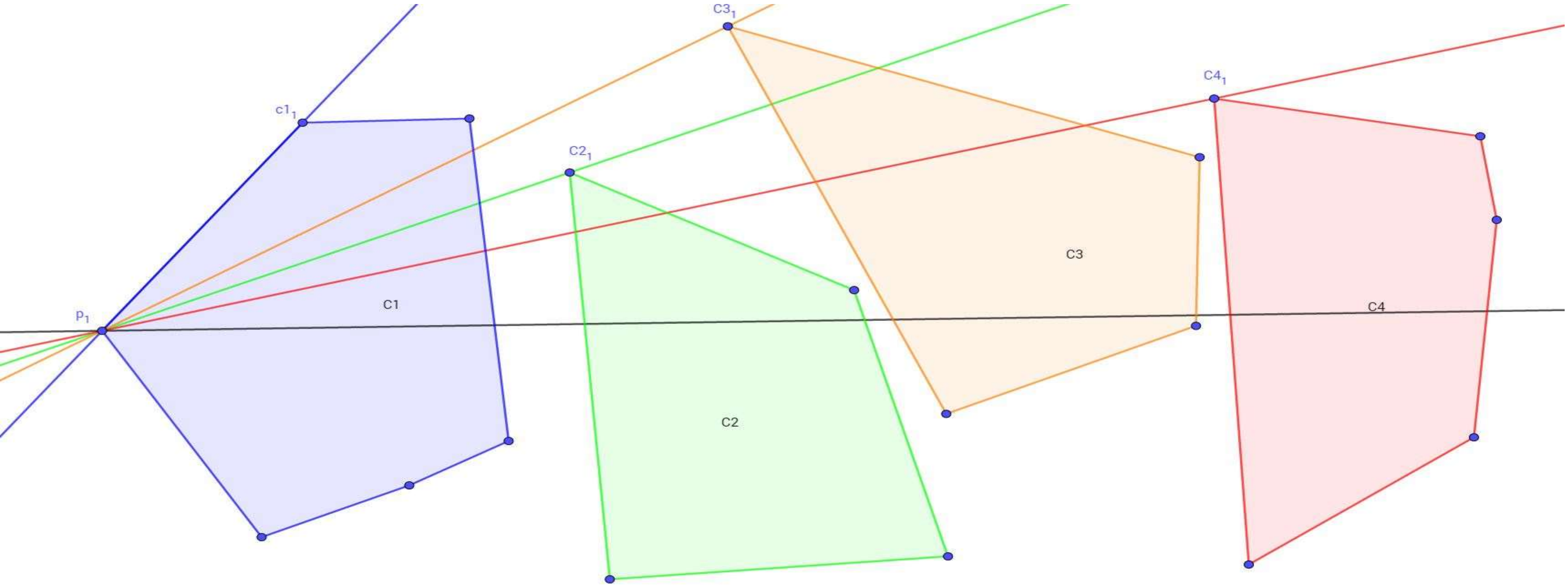
III) Méthode optimale : Méthode de CHAN

A) Cas Bidimensionnel :



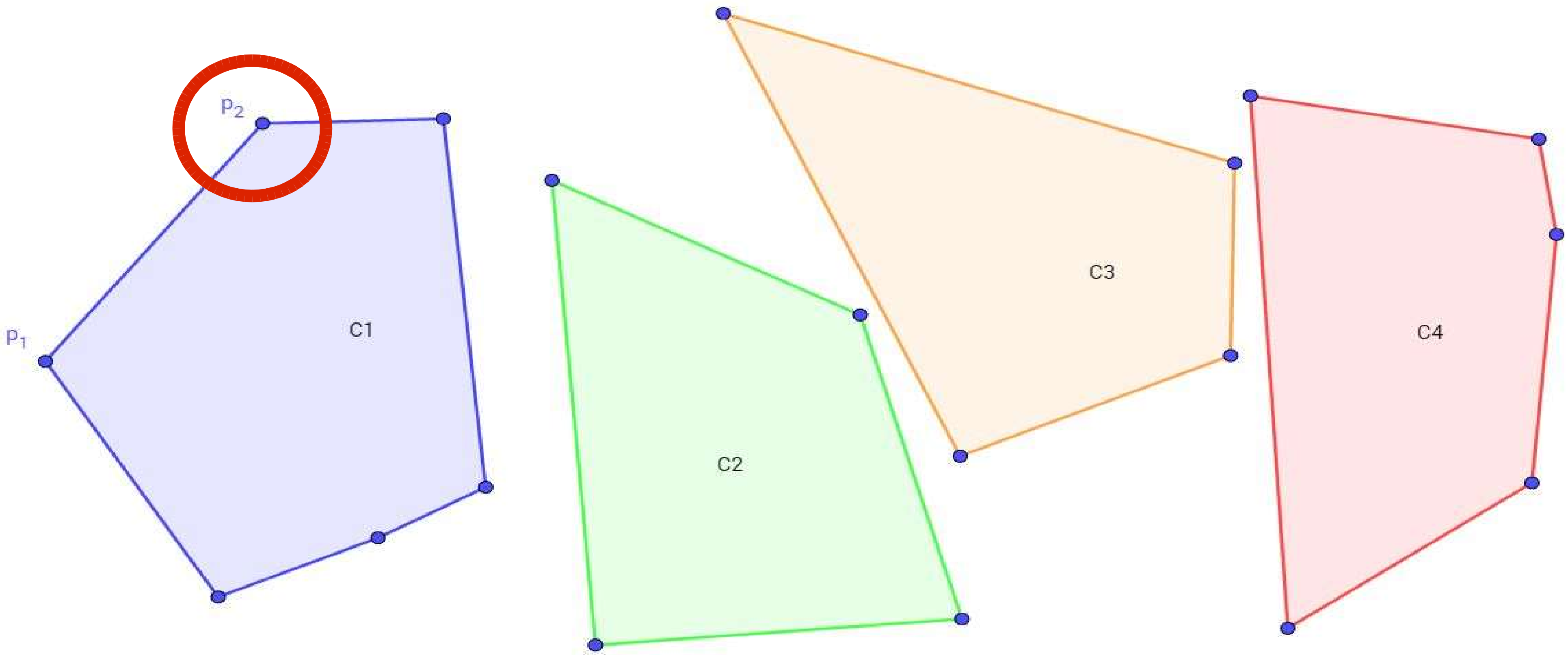
III) Méthode optimale : Méthode de CHAN

A) Cas Bidimensionnel :



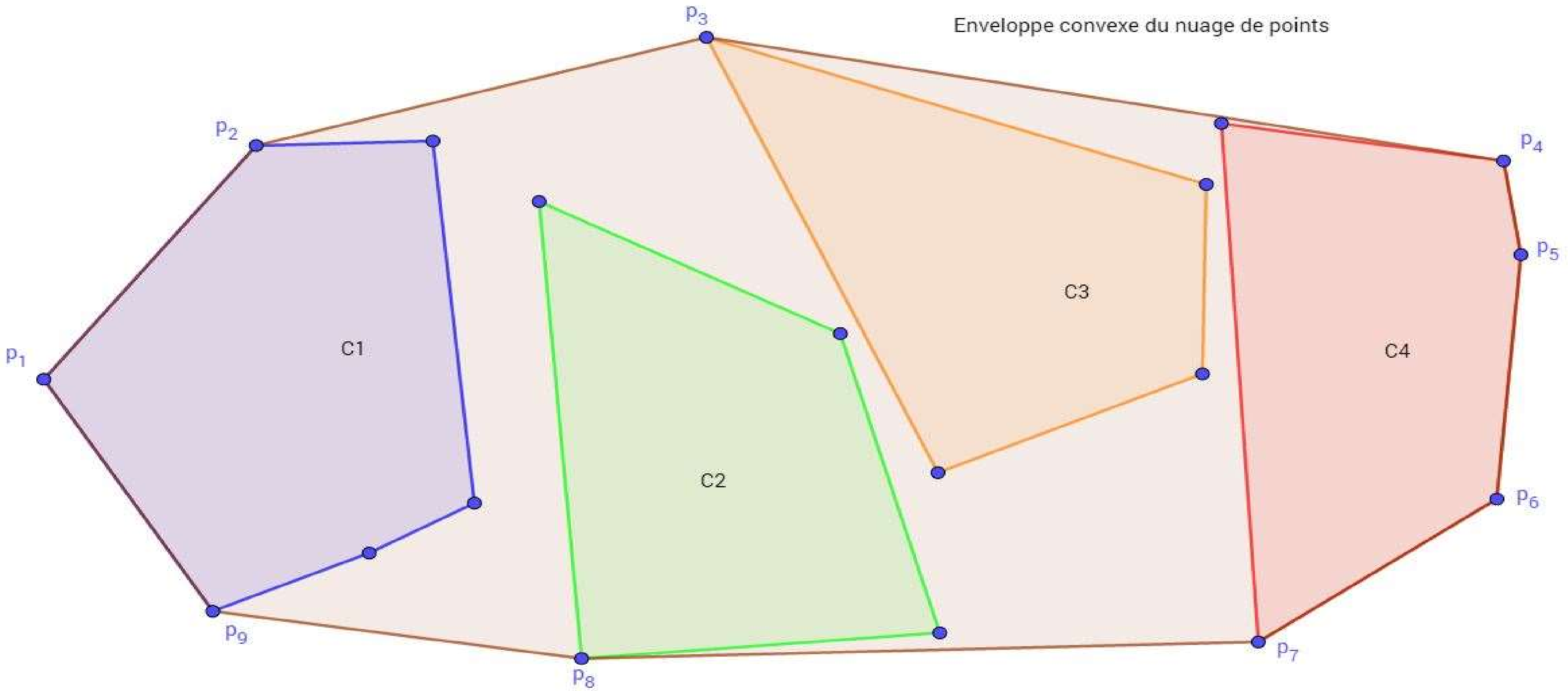
III) Méthode optimale : Méthode de CHAN

A) Cas Bidimensionnel :



III) Méthode optimale : Méthode de CHAN

A) Cas Bidimensionnel :



III) Méthode optimale : Méthode de CHAN

A) Cas Bidimensionnel :

→ Sans connaître m, le nombre de sommets de l'enveloppe.

→ m est le nombre de sommets et h le nombre que l'on utilise :

→ m =< h

→ m > h

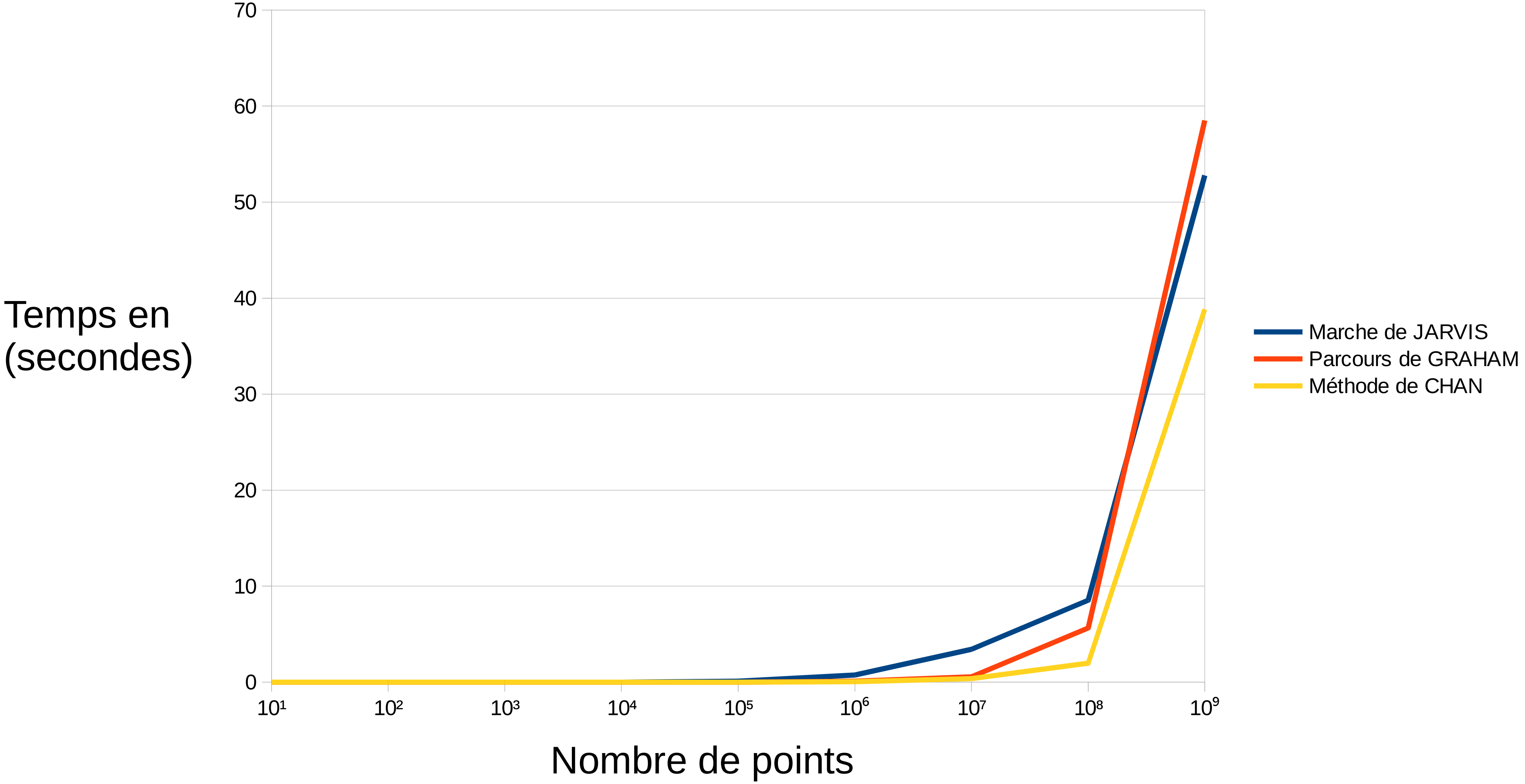
→ $h_n = 2^{\left(2^n\right)}$

→ C = $\Theta(n * \log(m))$

n = nombre de points du nuage

m = nombre de sommets de l'enveloppe convexe

III) Méthode optimale : Comparaison des complexités



Résultats obtenus avec mes algorithmes

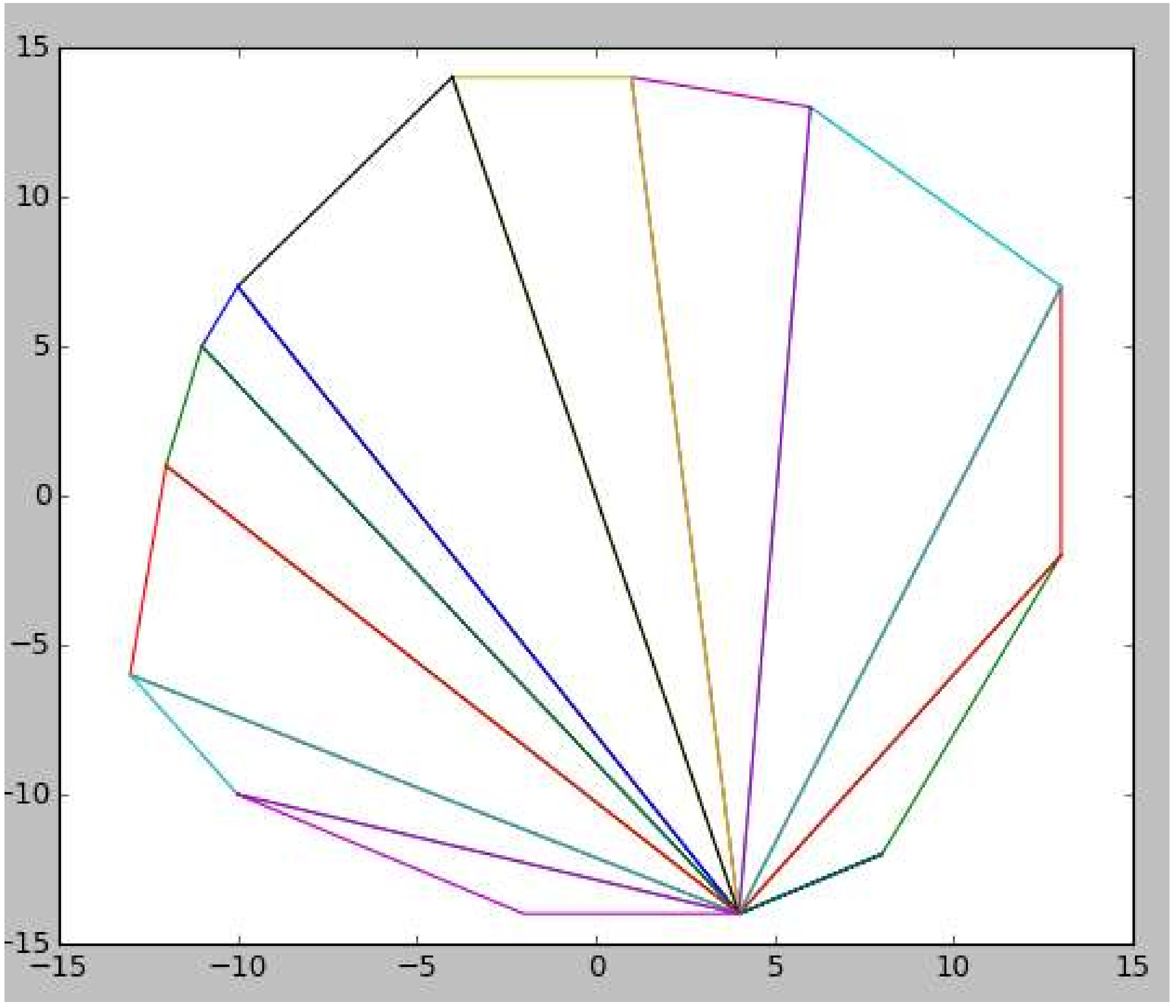
Conclusion

→ Algorithme optimal = méthode de CHAN

→ Améliorations :
  → Nombre de sommets de l'enveloppe
  → Réutilisation des calculs précédents

→ Problèmes :
  → Besoin des autres méthodes
  → Difficultés dans le cas 3D

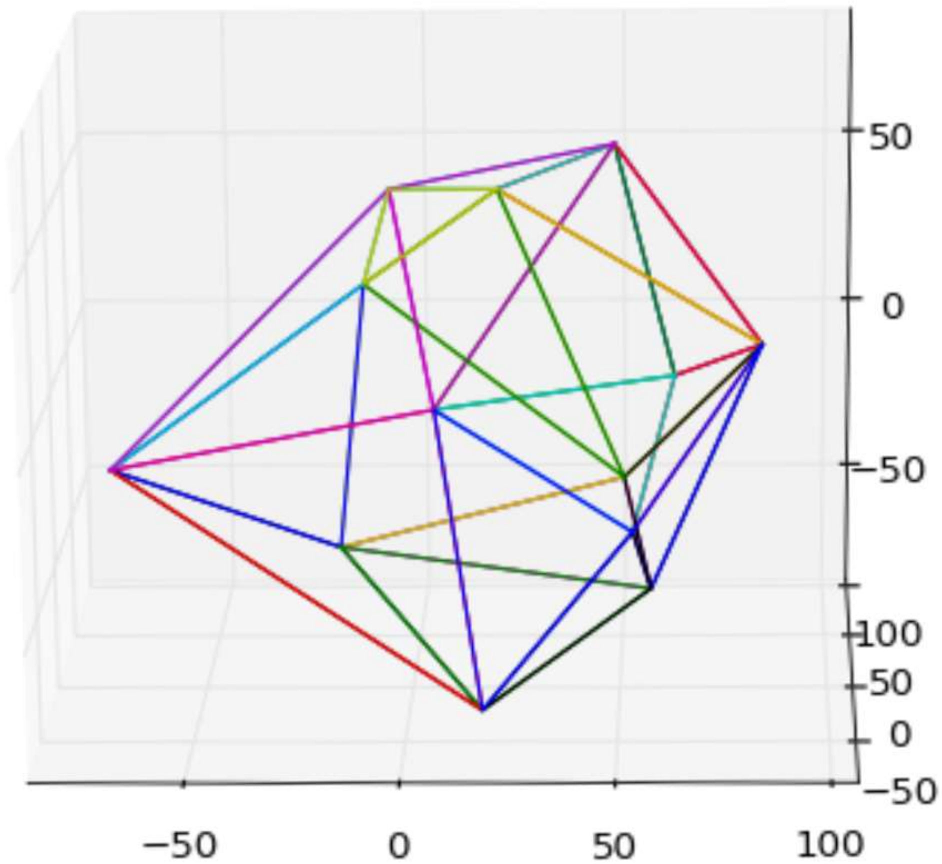
Calcul de l'aire



→ Triangulation du polynôme
→ Calcul de l'aire de chaque triangle
→ Convexité

$C(n) = \Theta(m)$ m = nombre de sommets de l'enveloppe

Calcul du volume



→ Propriété de convexité

→ Volume = somme des tétraèdres

→ $C(n) = \Theta(m)$
m = nombre de faces

Annexe

- → Géométrie algorithmique
- → Démonstration des complexités

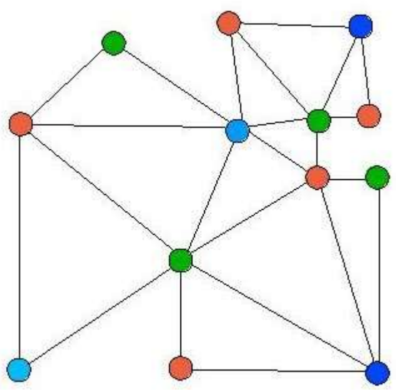
Géométrie algorithmique

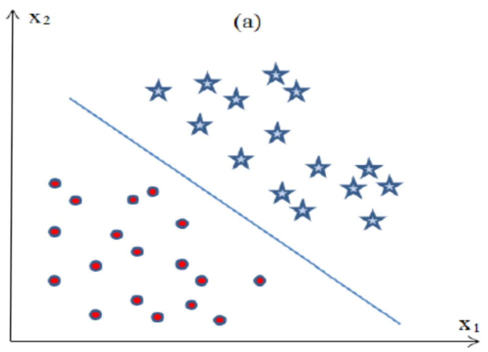
→ Triangulation de polygones

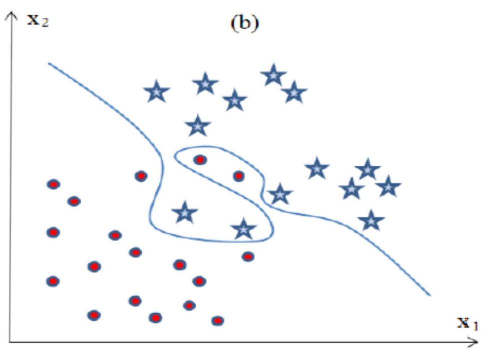
→ Recherche des points les plus proches

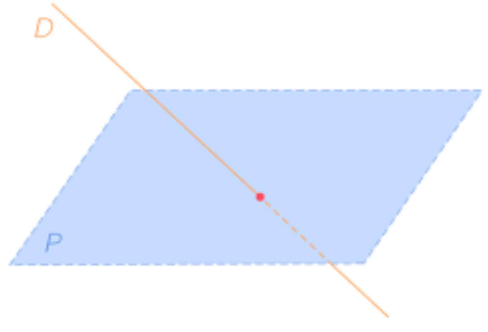
→ Recherche de points suivant certaines contraintes

→ Recherche d'intersections (segments, plans, etc...)









Démonstration des complexités

I) Cas bidimensionnel

→ Méthode naïve :

On recherche la liste de tous les couples de points possibles. On parcourt la liste des points deux fois pour obtenir une liste de taille n(n – 1) .

On doit alors parcourir cette liste et pour chaque élément (c'est à dire chaque droite possible), déterminer si la droite appartient à l'enveloppe convexe. Pour chaque élément on doit donc procéder à n tests.

On trouve donc une complexité : $C = \Theta(n^3)$

Démonstration des complexités

→ Marche de JARVIS :

On part d'un point particulier de l'enveloppe convexe (ici le point d'ordonnée minimale) .

Puis on recherche les points qui maximisent l'angle d'ouverture avec le segment précédent.

Donc on doit, pour les m points de l'enveloppe convexe, faire à chaque fois Θ(n) tests.

On obtient donc comme complexité :

$$C = \Theta(n \cdot m)$$

Démonstration des complexités

→ Parcours de Graham :

On trouve le point d'ordonnée minimale en complexité unitaire.

On crée notre liste triée selon l'angle d'ouverture en Θ(nlog(n)) (avec un tri fusion)

Une fois la liste triée, on la parcourt et confirme que chaque point appartient à l'enveloppe. Ce qui se fait donc en Θ(n).

Au final, on retrouve bien comme complexité :

$$C = \Theta\left(n \cdot \log(n)\right)$$

Démonstration des complexités

II) Cas tridimensionnel

→ Méthode naïve :

Premièrement on crée la liste de tous les triplets de points donnant tous les plans possibles. Cela s'effectue en n^3 opérations.

Ensuite, pour chacun des n^3 plans, on doit déterminer s'il appartient à l'enveloppe convexe ou non.

On parcourt donc, l'ensemble des plans et à chaque passage, on fait n tests.

On obtient donc comme complexité :$C = \Theta(n^4)$

Démonstration des complexités

→ Méthode de complexité équivalente à JARVIS :

On détermine la première face de l'enveloppe convexe en Θ(n) tests.

A chaque nouvelle face, on fait à nouveau Θ(n) tests pour déterminer parmi les Θ(n) points restants, le point qui formera la prochaine face de l'enveloppe.

On va donc parcourir les m faces de l'enveloppe convexe et faire Θ(n) tests.

On a donc une complexité en $\Theta(n \cdot m)$

Démonstration des complexités

III) Méthode de CHAN :

→ On doit calculer les $\frac{n}{h}$ sous-enveloppes convexes.

Chacune se calcule en Θ($h \cdot \log(h)$). On a donc pour la première étape : C1 = Θ($n \cdot \log(h)$)

→ Ensuite, pour chaque point de l'enveloppe, on doit trouver les tangentes à chaque polygone par dichotomie. On a donc, à chaque fois, faire $\frac{n}{h}$ dichotomies.

On a donc C2 = Θ($\frac{n}{h} \cdot \log(h)$) Θ(h) = Θ($n \cdot \log(h)$).

La complexité est donc de Θ($n \cdot \log(h)$).

Démonstration des complexités

III) Méthode de CHAN :

→ Dans notre utilisation, on utilise la suite des h_n :

C = $\sum_{t=0}^{\log(\log(m))} \Theta(n \cdot \log(2^{(2^t)})) = \Theta(n \cdot \log(m))$

Démonstration des complexités

→ Calcul de l'aire :

On considère que la détermination de l'enveloppe convexe a déjà été réalisée. On ne comptera donc pas la complexité de l'algorithme de détermination d'enveloppe convexe ici.

On crée une liste de m – 2 triangles en fixant un point de départ en tournant dans le sens trigonométrique pour prendre chaque couple de points consécutifs.

On calcule ensuite l'aire de chaque triangle et on les additionne :

On obtient donc comme complexité : $\Theta(m)$

Démonstration des complexités

→ Calcul du volume :

On considère que la détermination de l'enveloppe convexe a déjà été réalisée. On ne comptera donc pas la complexité de l'algorithme de détermination d'enveloppe convexe ici.

On crée une liste de m tétraèdres en fixant un point appartenant à l'enveloppe convexe en tournant dans le sens trigonométrique pour prendre chaque face de l'enveloppe convexe.

On calcule ensuite le volume de chaque tétraèdre et on les additionne :

On obtient donc comme complexité : $\Theta(m)$