

DM n° 11 — corrigé

1. Les formules $(p \vee q)$ et $(p \wedge q)$ sont toutes les deux satisfiables (par exemple pour la valuation φ telle que $\varphi(p) = \varphi(q) = V$) donc elles sont équivalentes. En revanche, elle ne sont pas équivalentes : la valuation φ telle que $\varphi(p) = V$ et $\varphi(q) = F$ est un modèle pour la première mais pas pour la deuxième.
2. La formule en FNC obtenue n'a alors aucune raison d'être de taille linéaire en la taille de la formule initiale. Dans le pire cas cette taille peut même être exponentielle. C'est cette partie du théorème qui est mise en défaut.
3. Construire la transformée de Tarski de la formule $(p \vee \neg q)$. En notant $G = p \vee \neg q$, on a : $S(G) = \{p, q, \neg q, G\}$, $V(G) = \{p, q\}$ et $E(G) = \{\neg q, G\}$. Par définition, la transformée de Tarski de G est :

$$T(G) = a_G \wedge (\neg q) \wedge E(G)$$

$$= a_G \wedge$$

$$\{(\neg a_q \vee \neg a_p) \wedge (a_p \vee a_q)\} \wedge$$

$$\{(\neg a_q \vee a_p \vee a_{\neg q}) \wedge (\neg a_p \vee a_q)\} \wedge (\neg a_q \vee a_G)$$

4. Pour $F \in \mathcal{F}$ ne faisant intervenir que les connecteurs $\neg$ et $\vee$, on note $P(F)$ la propriété : $|S(F)| \leq 2|F| + 1$. Montrons cette propriété par induction. Elle est immédiatement vraie pour les cas de base. Si G, H sont deux formules telles que $P(G)$ et $P(H)$ sont vraies alors d'un part :

$$S(\neg G) = \{\neg G\} \cup S(G) \quad \text{et} \quad |\neg G| = 1 + |G|$$

Comme $|S(G)| \leq 2|G| + 1$, on a bien

$$|S(\neg G)| = 1 + |S(G)| \leq 1 + 2|G| + 1 = 2|\neg G| + 1$$

Donc $P(\neg G)$ est vraie. D'autre part :

$$S(G \vee H) = \{G \vee H\} \cup S(G) \cup S(H) \quad \text{et} \quad |G \vee H| = 1 + |G| + |H|$$

Par hypothèse sur G et H , on a :

$$|S(G \vee H)| \leq 1 + |S(G)| + |S(H)| \leq 1 + 2|G| + 2|H| + 2 = 2|G \vee H| + 1$$

Donc $P(G \vee H)$ est vraie.

On en déduit que $|E(F)| \leq |S(F)| \leq 2|F| + 1$.

Remarquons que l'on peut obtenir sans grand difficulté une majoration plus fine pour $|E(F)|$ qui est en fait majorée par $|F|$. Cependant, la majoration grossière suffit pour montrer que la formule est de taille linéaire en F , ce qui est la seule chose importante ici.

5. Soit $G \in \mathcal{E}(F)$. Comme F ne fait intervenir que les opérateurs $\neg$ et $\vee$ alors deux choses l'une : soit il existe une formule H telle que $G = \neg H$ et dans ce cas $|H(G)| = 5$ par définition de l'opérateur $\neg$, soit il existe deux formules K, L telles que $G = K \vee L$ et dans ce cas $|E(G)| = 9$. Donc, pour toute formule G de $\mathcal{E}(F)$ on a $|H(G)| \leq 9$.
6. On a :

$$|T(F)| = |a_F \wedge \bigwedge_{G \in E(F)} E(G)|$$

$$= \sum_{G \in E(F)} (1 + |H(G)|) \quad (\text{explication ci-dessus})$$

$$\leq \sum_{G \in E(F)} (1 + 9) \quad (\text{par la question 5.})$$

$$= 10 |E(F)|$$

$$\leq 20|F| + 10 \quad (\text{par la question 4.})$$

Pour passer de la première à la deuxième ligne, on copie le nombre de connecteurs pour chaque clause $E(G)$, on compte la taille de cette clause et on y ajoute 1 pour prendre en compte le connecteur $\wedge$ qui la précède. Finalement, la majoration trouvée est bien linéaire en $|F|$.

7. Par une table de vérité ou immédiatement par équivalences.
8. a) Soit G une formule telle que $\neg G \in E(F)$. On a :

$$\varphi'(\neg(\neg(G))) = \varphi'(\neg a_G \vee \neg a_G) \wedge (a_G \vee a_{\neg G}) \quad (\text{par définition})$$

$$= \varphi'(\neg a_G \vee \neg a_G) \quad (\text{par la question 4.})$$

$$= \{ \neg \} \varphi'(\neg a_G) \wedge \varphi'(\neg a_G)$$

$$= \{ \neg \} \varphi'(\neg a_G) \wedge \{ \neg \} \varphi'(a_G)$$

$$= \{ \neg \} \varphi'(\neg G) \wedge \{ \neg \} \varphi'(G) \quad (\text{par définition de } \varphi')$$

$$= V$$

Donc pour toute formule G telle que $\neg G \in E(F)$, $\phi^1(i, \neg G) = V$.

b) Soit G, H deux formules telles que $G \vee H \in E(F)$. On pourrait utiliser le même style de rédaction que pour la question précédente mais en vocé un autre. On a :

$$\phi^1(G \vee H) = \phi^1(a_G \wedge H) \leftrightarrow (a_G \vee a_H))$$

d'après la question 2. De plus par définition de ϕ^1 et de la table de vérité de $\vee$ on a :

$$\begin{aligned}\phi^1(a_G \vee H) &= \phi^1(G \vee H) \\ &= \max(\phi^1(G), \phi^1(H)) \\ &= \max(\phi^1(a_G), \phi^1(a_H)) \\ &= \phi^1(a_G \vee a_H)\end{aligned}$$

La table de vérité de $\leftrightarrow$ permet ainsi de conclure que pour toutes formules G, H telles que $G \vee H \in E(F)$, $\phi^1(G \vee H) = V$.

c) Les deux questions précédentes montrent que toutes les clauses de $T(F)$ sont satisfaites par ϕ^1 sauf éventuellement la première, a_1 . Or $\phi^1(a_1) = \phi^1(F) = V$ puisque ϕ satisfait F par hypothèse. Donc $\phi^1(T(F)) = V$.

9. L'énoncé n'est pas très précis ici. Il faut bien supposer que ϕ^1 est une valuation sur $S(F)$ et pas simplement sur $E(F)$.

(1) On montre la propriété $\phi^1(F) = \phi^1(a_F) = V$ par induction sur $F \in S(F)$. Si $F \in V(F)$ alors $P(F)$ est vérifiée de par la définition de ϕ . Sinon, comme F ne fait intervenir que les opérateurs $\neg$ et $\vee$, il en va de même de ses sous-formules. Soit $F \in S(F) \setminus V(F)$:

(a) Si $F = \neg G$ avec $G \in S(F)$ et $P(G)$. Comme ϕ^1 satisfait $T(F)$, ϕ^1 satisfait en particulier la clause $i(F) = i(\neg G)$ et donc $\phi^1(a_G) = \neg a_G = V$ en utilisant la question 2. D'après la table de vérité de $\neg$, cela implique que $\phi^1(a_G) = \phi^1(\neg a_G)$. On a donc :

$$\begin{aligned}\phi^1(F) &= \phi^1(\neg G) && \text{(puisque } F = \neg G) \\ &= V - \phi^1(G) && \text{(par définition du connecteur } \neg) \\ &= V - \phi^1(a_G) && \text{(car } P(G) \text{ est vraie)} \\ &= \phi^1(\neg a_G) && \text{(à nouveau par définition de } \neg) \\ &= \phi^1(a_G) && \text{(d'après l'égalité ci-dessus)} \\ &= \phi^1(a_F) && \text{(puisque } F = \neg G)\end{aligned}$$

Dans ce cas, $P(F)$ est bien vraie.

(b) De même, si $F = G \vee H$ où $G, H \in S(F)$ telles que $P(G)$ et $P(H)$ sont vraies. Par hypothèse, ϕ^1 satisfait $T(F)$ donc en particulier la clause $i(F) = i(G \vee H)$ donc $\phi^1(a_G \wedge H) \leftrightarrow (a_G \vee a_H) = V$ en utilisant la question 2. On en déduit que $\phi^1(a_G \wedge H) = \phi^1(a_G \vee a_H)$ puis que :

$$\begin{aligned}\phi^1(F) &= \phi^1(G \vee H) && \text{(puisque } F = G \vee H) \\ &= \max(\phi^1(G), \phi^1(H)) && \text{(par définition du connecteur } \vee) \\ &= \max(\phi^1(a_G), \phi^1(a_H)) && \text{(car } P(G) \text{ et } P(H) \text{ sont vraies)} \\ &= \phi^1(a_G \vee a_H) && \text{(par définition du connecteur } \vee) \\ &= \phi^1(a_G \wedge H) && \text{(d'après l'égalité ci-dessus)} \\ &= \phi^1(a_F) && \text{(puisque } F = G \vee H)\end{aligned}$$

Dans ce cas aussi, $P(F)$ est vraie.

(2) On en déduit immédiatement que $\phi^1(F) = \phi^1(a_F) = V$ puisque ϕ^1 satisfait $T(F)$ donc en particulier sa première clause a_1 .

10. La question 8. montre que si F est satisfiable alors $T(F)$ l'est aussi. La question 9. montre la réciproque, c'est-à-dire que si $T(F)$ est satisfiable alors F l'est aussi. Les formules F et $T(F)$ sont donc équivalentes.

11. Soit F une formule ne faisant intervenir que les connecteurs $\neg$ et $\vee$. Montrons que la formule $T(F)$ satisfait toutes les propriétés requises par le théorème T :

- La formule $T(F)$ est sous forme normale conjonctive par construction
- La question 8. assure que la table de $T(F)$ est linéaire en la taille de F
- La question 10. assure que F et $T(F)$ sont équivalentes

Le théorème T est donc démontré pour toutes les formules qui ne font intervenir que les connecteurs $\neg$ et $\vee$.

12. On considère les équivalences suivantes, pour G et H deux formules quelconques :

$G \wedge H \equiv \neg(\neg G \vee \neg H)$, $G \rightarrow H \equiv (\neg G \vee H)$ et $G \leftrightarrow H \equiv (\neg G \vee H) \vee (\neg H \vee G)$. On a remplacé un connecteur par au plus huit connecteurs. On en déduit que toute formule F est équivalente à une formule F' ne faisant intervenir que $\neg$ et $\vee$ dont la taille vérifie $|F'| \leq 8|F|$. On montre sans difficulté que la formule $T(F')$ satisfait toutes les propriétés requises du théorème T.