

Soit un graphe connexe $G = (V, E)$ avec $(e_1, \dots, e_m)$ un ordre fixé sur les arêtes.

On définit les graphes successifs $(V, E_0), (V, E_1), \dots, (V, E_k)$ par :

$k \leftarrow 0; E_0 \leftarrow \emptyset$

Pour i de 1 à m faire :

si $(V, E_k \cup \{e_i\})$ est sans cycle alors :

$E_{k+1} \leftarrow E_k \cup \{e_i\}; k \leftarrow k + 1$

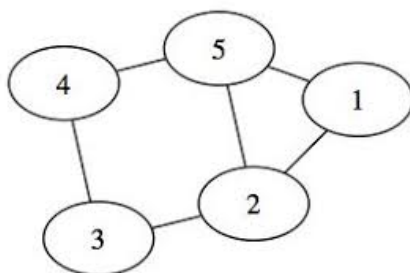
On admet que la procédure précédente renvoie un arbre couvrant de G . Le graphe (V, E_k) ultime aura donc une seule composante connexe.

- 1** Pour obtenir l'algorithme de Kruskal, dans quel ordre doit-on considérer les arêtes ?

On va considérer l'algorithme de Monte Carlo qui consiste à prendre une permutation choisie uniformément pour les arêtes et à arrêter l'algorithme lorsqu'il reste exactement deux composantes connexes (au lieu d'une seule dans la description ci-dessus). On va montrer que cette procédure renverra une coupe minimale avec une probabilité au moins $\frac{2}{n(n-1)}$ où n est le nombre de sommets du graphe.

Etant donné un graphe $G = (V, E)$ et un ensemble X de sommets de G , la coupe associée à X , notée $\delta(X)$, est l'ensemble des arêtes ayant exactement une extrémité dans X . La taille de la coupe associée à X est le cardinal de $\delta(X)$. On s'intéresse à la recherche de X minimisant $|\delta(X)|$.

- 2** Donner un ensemble X de cardinal 2 de sommets du graphe suivant correspondant à une coupe minimale.



- 3** Quel lien existe-t-il entre $\delta(X)$ et $\delta(V \setminus X)$?

Soit k la taille minimum d'une coupe de G .

- 4** Montrer qu'à chaque étape de l'algorithme, si $T = (V, E_t)$ a i composantes connexes, alors G contient au moins $\frac{ik}{2}$ arêtes e telles que les extrémités de e sont dans des composantes connexes distinctes de T .

Soit Y un ensemble de sommets de G tels que $|\delta(Y)| = k$.

- 5** Soit i une étape de l'algorithme. On considère T au moment précis où il passe de i composantes connexes à $i - 1$ composantes connexes et pour lequel on n'a encore sélectionné aucune arête de l'ensemble $\delta(Y)$. Montrer que la probabilité que l'arête que l'on ajoute à T (de manière à avoir $i - 1$ composantes connexes) soit dans $\delta(Y)$ est au plus $\frac{2}{i}$.

- 6** Montrer que la probabilité de ne jamais choisir une arête de $\delta(Y)$ est au moins $\frac{2}{n(n-1)}$.

- 7** Montrer que si on ne choisit jamais d'arête dans $\delta(Y)$ alors à la fin de l'algorithme, on a deux composantes connexes X et $V \setminus X$ avec $X = Y$ ou $X = V \setminus Y$.

- 8** Montrer qu'à la fin de l'algorithme, lorsque T a exactement deux composantes connexes (appelons-les X et $V \setminus X$), la probabilité que $\delta(X) = \delta(Y)$ est au moins $\frac{2}{n(n-1)}$.

On peut estimer que $\frac{2}{n(n-1)}$ est une probabilité trop faible pour que l'algorithme soit intéressant en pratique. On décide donc d'exécuter l'algorithme t fois, pour un certain entier $t \geq 1$ dépendant de n , et de renvoyer la plus petite coupe trouvée au cours de ces t exécutions.

- 9** Montrer que la probabilité que la plus petite coupe trouvée au cours de ces t exécutions ne soit pas une coupe minimum est au plus $\exp(-\frac{2t}{n(n-1)})$.

- 10** Discuter de la complexité de l'algorithme obtenu pour garantir une probabilité de bonne réponse d'au moins $1 - e^{-10}$.