

Chapitre 10 : Logique et déduction

25 janvier

1 BREFS RAPPELS SUR LE CALCUL PROPOSITIONNEL

1.1 SYNTAXE

En sup, nous avons formalisé la notion de formule booléenne. Nous avons défini syntaxiquement les formules de manière inductive c'est-à-dire comme des arbres construits à l'aide de variables, du symbole unaire $\neg$ et des symboles binaires $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ et $\leftrightarrow$.

▷ **Question 1.** Représentez sous forme arborescente la formule dont on donne ici le parcours préfixe : $\neg\vee\neg\wedge p\neg q\vee\neg rs$. Donnez ensuite la représentation par parcours infixe de cette formule avec les conventions d'écriture usuelles. Donnez une autre formule dont le parcours infixe ne diffère que par le placement des parenthèses. ◁

▷ **Question 2.** Proposez un type OCaml permettant de représenter les formules. Vous serez amené à faire un choix quant à la représentation des variables. ◁

1.2 SÉMANTIQUE

Leur syntaxe étant fixée, il est possible de définir la signification des formules. On note $\mathcal{X}$ l'ensemble des variables utilisables pour écrire les formules.

Pour définir une sémantique, on commence par fixer un ensemble de valeur possibles $\mathbb{V}$. Dans la sémantique standard, qui donne aux formules leur signification habituelle, on a $\mathbb{V} = \{\text{vrai}, \text{faux}\}$.

Une valuation est une application $\sigma : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{V}$. Toute valuation σ peut être étendue à l'ensemble des formules inductivement en indiquant, par des tables de vérité, la valeur de $\sigma(\neg\phi)$, $\sigma(\phi \vee \psi)$, $\sigma(\phi \wedge \psi)$, $\sigma(\phi \rightarrow \psi)$ et $\sigma(\phi \leftrightarrow \psi)$ en fonction des valeurs de $\sigma(\phi)$ et de $\sigma(\psi)$.

Dans la sémantique standard, on choisit les tables suivantes.

$\neg$	vrai	faux
	faux	vrai

$\wedge$	vrai	faux
vrai	vrai	faux
faux	faux	faux

$\vee$	vrai	faux
vrai	vrai	vrai
faux	vrai	faux

$\rightarrow$	vrai	faux
vrai	vrai	faux
faux	vrai	vrai

$\leftrightarrow$	vrai	faux
vrai	vrai	faux
faux	faux	vrai

Dans la sémantique standard, pour une formule ϕ et une valuation σ , on dit que σ est un modèle de ϕ lorsque $\sigma(\phi) = \text{vrai}$. On note cela $\sigma \models \phi$. Dans le cas contraire on note $\sigma \not\models \phi$.

Lorsque pour toute valuation σ on a $\sigma \models \phi$, on dit que ϕ est une tautologie et on note $\models \phi$.

▷ **Question 3.** [Sémantique non-standard] On définit une sémantique non-standard pour les formules propositionnelles écrites avec $\neg$, $\wedge$, $\vee$ et $\rightarrow$ en se basant sur un ensemble $\mathbb{V}$ de 3 valeurs : le vrai, le faux et une valeur qui représente l'indéterminé $\top$. On définit la sémantique de $\neg$, $\wedge$, et $\vee$ comme suit : si l'un des opérandes est $\top$, le résultat est $\top$; sinon le résultat est comme dans la sémantique standard. Quant à $\rightarrow$, on définit sa sémantique ainsi :

$\rightarrow$	vrai	faux	$\top$
vrai	vrai	faux	vrai
faux	vrai	vrai	vrai
$\top$	vrai	$\top$	vrai

On dit de même que $\sigma \models \phi$ si $\sigma(\phi) = \text{vrai}$.

1. Montrez que $p \vee \neg p$ n'est pas une tautologie.
2. Donnez une tautologie simple (mais sans utiliser de constante!).

◁

2 DÉDUCTION NATURELLE POUR LE CALCUL PROPOSITIONNEL

2.1 CONSÉQUENCE SÉMANTIQUE

Soit ϕ et ψ deux formules. Si pour toute valuation σ telle que $\sigma \models \phi$, on a $\sigma \models \psi$, alors on dit que ψ est une conséquence sémantique de ϕ , et on note $\phi \models \psi$.

Plus généralement, pour Γ un ensemble de formules et ψ une formule, on dit que ψ est une conséquence sémantique de Γ , et on note $\Gamma \models \psi$, si toute valuation σ qui est un modèle de toutes les formules de Γ est aussi un modèle de ψ .

Remarque : on écrira donc indifféremment $\phi \models \psi$ ou $\{\phi\} \models \psi$. Pour alléger les écritures, on écrira aussi $\Gamma, \Delta \models \phi$ au lieu de $\Gamma \cup \Delta \models \phi$.

Remarque : si ψ est une tautologie, on peut la voir comme une conséquence sémantique de l'ensemble vide, ce qui met en cohérence la notation définie ici et celle de la section précédente.

▷ **Question 4.** Montrez que pour la sémantique standard on a $(p \wedge (q \vee r) \wedge \neg(q \vee s)) \vee (\neg q \wedge (s \rightarrow p)) \models q \rightarrow p$, avec p, q, r et s des variables. ◁

▷ **Question 5.** Quelle est la complexité d'un algorithme naïf qui, étant donné deux formules ϕ et ψ , détermine si $\phi \models \psi$? ◁

▷ **Question 6.** Montrez pour la sémantique standard et pour toutes formules ϕ et ψ que $\phi \models \psi \rightarrow \phi$. ◁

▷ **Question 7.** [Sémantique non-standard] On reprend la sémantique définie en question 1.2. Est-il vrai que pour toutes formules ϕ et ψ , $\phi \models \psi$ si et seulement si $\models \phi \rightarrow \psi$? ◁

▷ **Question 8.** Montrez pour la sémantique standard et pour toutes formules ϕ et ψ que $\{\phi, \phi \rightarrow \psi\} \models \psi$. ◁

2.2 SYSTÈME DE DÉDUCTION FORMELLE

Le résultat de la question précédente nous fournit une règle de simplification syntaxique des formules dont on s'est déjà servi pour traiter des problèmes en sup. Il s'agit d'une relation de simplification syntaxique qui est justifiée par un résultat portant sur la sémantique. C'est un mode de raisonnement connu appelé Modus Ponens.

Prouver que deux formules sont sémantiquement équivalentes, que l'une implique sémantiquement l'autre, qu'une formule est une tautologie, satisfiable, etc. se ramène dans le cas général à déterminer leurs tables de vérité. La complexité d'une telle opération peut alors être exponentielle en le nombre de variables. La déduction naturelle est un outil permettant de raisonner non pas sur la sémantique des formules, mais sur leur syntaxe. Elle est proche des raisonnements mathématiques usuels.

Afin de pouvoir automatiser les manipulations syntaxiques, il convient de formaliser des règles sous la forme d'un système de déduction formelle.

Au niveau le plus général, un système de déduction formelle est une relation entre formules : pour Γ un ensemble de formules et ϕ une formule, on note $\Gamma \vdash \phi$ lorsque cet ensemble et cette formule sont en relation, et on dit que, dans le système de déduction formelle considéré, ϕ se déduit de Γ .

En pratique, un tel système de déduction est défini à l'aide de règles qui déterminent dans quels cas on a $\Gamma \vdash \phi$.

Bien entendu, l'intérêt d'un système de déduction formelle dépend de la praticité de ces règles et de l'adéquation du système à la sémantique étudiée.

Il convient de distinguer a priori $\Gamma \vdash \phi$ qui est une relation syntaxique que l'on obtiendra par application formelle de règles et $\Gamma \models \phi$ qui est une relation sémantique qui dépend de la sémantique choisie et qui se prouve à l'aide de tables de vérité.

Une relation $\Gamma \vdash \phi$ est appelée un séquent.

Définition 1. Une règle d'inférence est la donnée d'un ensemble de séquents $\Gamma_1 \vdash \varphi_1, \dots, \Gamma_n \vdash \varphi_n$ appelés *prémisses* et un séquent $\Gamma \vdash \varphi$ appelé *conclusion*.

2.3 LE SYSTÈME DE LA DÉDUCTION NATURELLE (GENTZEN, 1934)

On donne ici les règles régissant le système de la déduction naturelle pour la logique propositionnelle, noté $\vdash$. Les lettres grecques majuscules désignent des ensembles de formules, les minuscules désignent des formules.

Réflexivité et monotonie On a $\phi \vdash \phi$. Plus généralement, lorsque ϕ est l'une des formules de Γ (ie. $\phi \in \Gamma$ au sens ensembliste), on a $\Gamma \vdash \phi$. Plus généralement encore, lorsque $\Gamma \vdash \phi$, on a a fortiori $\Gamma, \Delta \vdash \phi$.

Règles pour la conjonction Une règle d'introduction de $\wedge$: lorsque $\Gamma \vdash \phi$ et $\Gamma \vdash \psi$, on a $\Gamma \vdash \phi \wedge \psi$. Deux règles d'élimination de $\wedge$: lorsque $\Gamma \vdash \phi \wedge \psi$, on a $\Gamma \vdash \phi$ et $\Gamma \vdash \psi$.

Il est usuel de noter les règles de déduction à l'aide d'un trait horizontal qui sépare les prémisses (en haut) et la conclusion (en bas). On note parfois sur le côté le nom de la règle.

La règle d'introduction précédente se note donc

$$(I\wedge) \frac{\Gamma \vdash \phi \quad \Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \phi \wedge \psi}$$

et les deux règles d'élimination se notent

$$(E\wedge_1) \frac{\Gamma \vdash \phi \wedge \psi}{\Gamma \vdash \phi} \quad \text{et} \quad (E\wedge_2) \frac{\Gamma \vdash \phi \wedge \psi}{\Gamma \vdash \psi}.$$

Ce formalisme permet de construire les preuves formelles sous forme d'arbres.

Par exemple, pour montrer que $\phi \wedge \psi \vdash \psi \wedge \phi$, on peut écrire, si on y pense :

On a $\phi \wedge \psi \vdash \phi \wedge \psi$, donc, par $(E\wedge_1)$, $\phi \wedge \psi \vdash \phi$ et, par $(E\wedge_2)$, $\phi \wedge \psi \vdash \psi$. Ces deux prémisses fournissent, par $(I\wedge)$, $\phi \wedge \psi \vdash \psi \wedge \phi$.

Mais pour trouver la preuve, il est intéressant de construire l'arbre ci-dessous de bas en haut, en trouvant à chaque fois la règle à appliquer et s'arrêtant grâce à la règle de réflexivité qui n'a aucune prémisses et fournit donc des feuilles :

$$(I\wedge) \frac{(E\wedge_2) \frac{(refl) \frac{}{\phi \wedge \psi \vdash \phi \wedge \psi}}{\phi \wedge \psi \vdash \psi} \quad (E\wedge_1) \frac{(refl) \frac{}{\phi \wedge \psi \vdash \phi \wedge \psi}}{\phi \wedge \psi \vdash \phi}}{\phi \wedge \psi \vdash \psi \wedge \phi}$$

Définition 2. Une dérivation pour un séquent $\Gamma \vdash \varphi$ est formée par une règle d'inférence dont la conclusion est $\Gamma \vdash \varphi$ reliée à une dérivation pour chacune des prémisses de cette règle. Ainsi la notion de dérivation est inductive (ce qui n'est pas surprenant puisque c'est un arbre). On dit qu'un séquent est dérivable lorsqu'il existe une dérivation finie dont il est la conclusion.

Plus formellement, une dérivation pour un séquent e est

- Soit un axiome c'est-à-dire une règle d'inférence dont les prémisses sont vides et la conclusion est e .
- Soit une règle d'inférence dont la conclusion est e et une dérivation pour chacun des prémisses de la règle.

Règles pour la disjonction L'introduction d'un $\vee$ est une forme d'affaiblissement :

$$(I\vee_1) \frac{\Gamma \vdash \phi}{\Gamma \vdash \phi \vee \psi} \quad \text{et} \quad (I\vee_2) \frac{\Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \phi \vee \psi}.$$

L'élimination de $\vee$ ne peut se faire que si on connaît une conclusion commune :

$$(E\vee) \frac{\Gamma \vdash \phi \vee \psi \quad \Gamma, \phi \vdash \chi \quad \Gamma, \psi \vdash \chi}{\Gamma \vdash \chi}.$$

▷ **Question 9.** Montrez que $\phi \vee \psi \vdash \psi \vee \phi$. ◁

▷ **Question 10.** Montrez que $\chi \vee (\phi \wedge \psi) \vdash (\chi \vee \phi) \wedge (\chi \vee \psi)$. ◁

▷ **Question 11.** Montrez que $\chi \wedge (\phi \vee \psi) \vdash (\chi \wedge \phi) \vee (\chi \wedge \psi)$. ◁

Règles pour l'implication La règle d'introduction de $\rightarrow$ traduit le principe suivant : pour montrer A implique B, on suppose A et on montre B.

$$(I\rightarrow) \frac{\Gamma, \phi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \phi \rightarrow \psi}.$$

La règle d'élimination de $\rightarrow$ n'est autre que le modus ponens !

$$(E\rightarrow) \text{ ou (MP)} \frac{\Gamma \vdash \phi \rightarrow \psi \quad \Gamma \vdash \phi}{\Gamma \vdash \psi}.$$

▷ **Question 12.** Montrer que $\vdash \phi \rightarrow \psi \rightarrow \phi$ et $\vdash \phi \rightarrow (\phi \rightarrow \psi) \rightarrow \psi$. ◁

▷ **Question 13.** Montrez que $\phi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi \vdash \phi \rightarrow \chi$. ◁

▷ **Question 14.** Montrez que $\phi \rightarrow \psi, \phi \rightarrow \chi \vdash \phi \rightarrow (\psi \wedge \chi)$. ◁

▷ **Question 15.** Montrer que

$$\frac{\Gamma \vdash \phi \rightarrow \psi \quad \Gamma, \phi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \psi}$$

et

$$\frac{\Gamma \vdash \phi \rightarrow \psi}{\Gamma, \phi \vdash \psi}$$

sont dérivables. ◁

Règles pour la négation On utilise une règle qui exprime qu'avoir une chose et son contraire forme une contradiction et que d'une contradiction on peut déduire ce qu'on veut :

$$(E\neg) \frac{\Gamma \vdash \phi \quad \Gamma \vdash \neg \phi}{\Gamma \vdash \psi}.$$

▷ **Question 16.** Montrez que $\neg \phi \vee \psi \vdash \phi \rightarrow \psi$. ◁

Pour écrire une règle d'introduction de la négation, il est utile de s'appuyer sur une formule antilogique. On pourrait fixer une variable propositionnelle, par exemple ξ , et utiliser l'antilogie $\xi \wedge \neg \xi$, mais c'est lourd et cela utilise encore le symbole de négation. Il est plus élégant d'introduire dans le langage un symbole constant, $\Box$, qui par définition est une antilogie : pour toute valuation σ , on a $\sigma \not\models \Box$.

On se donne alors la règle

$$(I\neg) \frac{\Gamma, \phi \vdash \Box}{\Gamma \vdash \neg \phi}.$$

▷ **Question 17.** Montrez que $\phi \vdash \neg \neg \phi$. ◁

▷ **Question 18.** Montrez que $\neg(\phi \vee \psi) \vdash \neg \phi \wedge \neg \psi$. ◁

▷ **Question 19.** Montrer que $\neg(\phi \wedge \neg \phi)$ et $\neg \neg \neg \phi \rightarrow \neg \phi$ sont des théorèmes c'est-à-dire se prouvent sans hypothèses. ◁

▷ **Question 20.** Montrer que

$$\frac{\Gamma \vdash \phi \rightarrow \psi}{\Gamma \vdash \neg \psi \rightarrow \neg \phi}$$

est dérivable. ◁

Il est parfois pratique de voir $\neg \phi$ comme $\phi \rightarrow \Box$.

▷ **Question 21.** Montrez que $\Gamma \vdash \neg \phi$ si et seulement si $\Gamma \vdash \phi \rightarrow \Box$. ◁

Théorème 1. Correction de la déduction naturelle (pour la sémantique standard) :
Pour tout ensemble de formules Γ et toute formule ϕ ,

$$\text{si } \Gamma \vdash \phi \quad \text{alors } \Gamma \models \phi.$$

▷ **Question 22.** [Sémantique non-standard] Le système de la déduction naturelle décrit ci-dessus est-il correct pour la sémantique définie en 1.2 ? ◁

Complétude de la déduction naturelle ? Il s'agit de savoir si pour tout ensemble de formules Γ et toute formule ϕ ,

$$\Gamma \models \phi \quad \text{entraîne} \quad \Gamma \vdash \phi.$$

Les règles précédentes ne permettent pas d'établir que $\neg\neg\phi \vdash \phi$.

Le système précédent est celui de la logique intuitionniste ou logique constructiviste. Il n'est pas complet.

▷ **Question 23.** [Logique classique] On considère les trois règles ci-dessous : tiers exclu, élimination de double négation, raisonnement par l'absurde.

$$(TE) \frac{}{\Gamma \vdash \phi \vee \neg\phi} \quad (E\neg\neg) \frac{\Gamma \vdash \neg\neg\phi}{\Gamma \vdash \phi} \quad (RA) \frac{\Gamma, \neg\phi \vdash \Box}{\Gamma \vdash \phi}$$

Montrez qu'en ajoutant l'une quelconque de ces trois règles au système, il devient possible de prouver les deux autres.

En ce sens, ces trois règles sont équivalentes. En ajoutant l'une de ces règles (et donc de fait les trois), on obtient le système de la logique classique des mathématiques, qui est complet.

◁

▷ **Question 24.** Montrer que $(\neg\phi \vee \psi) \rightarrow (\phi \rightarrow \psi)$ est un théorème en logique classique (il ne l'est pas en logique intuitionniste).

◁

3 CALCUL DES PRÉDICATS

La logique propositionnelle traite seulement de la relation entre des faits abstraits représentés par les variables propositionnelles. Le calcul des prédicats remplace ces variables propositionnelles par des formules atomiques, elles-mêmes écrites à partir de termes. Ces termes et ces formules atomiques permettent d'étudier des théories variées (théorie des groupes, de l'arithmétique, des ensembles).

Puisque termes et formules visent à exprimer des réalités variées, au langage commun de la logique propositionnelle et du calcul des prédicats s'ajouteront, selon le cas, des symboles spécifiques.

3.1 SYNTAXE

Éléments de langage communs pour le calcul des prédicats Aux symboles introduits pour la logique propositionnelle (moins les variables propositionnelles), on adjoint :

- un ensemble dénombrable $\mathcal{X}$ de variables (non-propositionnelles a priori),
- les quantificateurs $\forall$ et $\exists$ et
- sauf dans des cas très particuliers, le symbole d'égalité $=$.

Éléments de langage spécifiques Une signature pour le calcul des prédicats comporte :

- un nombre fini de symboles de fonction, chacun d'eux ayant une arité entière positive (les symboles d'arité 0 sont appelés symboles de constantes) ;
- un nombre fini de symboles de relation ou de symboles de prédicats, chacun d'eux ayant une arité entière positive.

Par exemple, une signature prédictive pour parler d'algèbre pourra être décrite avec

- un symbole de constante noté e ,
- un symbole de fonction d'arité 2 $\star$ qu'on conviendra de noter de façon infixe,
- un symbole de fonction d'arité 1 qu'on conviendra de noter en exposant après $\cdot^{-1}$.

Avec ces symboles et les éléments communs, on pourra écrire par exemple le terme $x \star x^{-1}$ et la formule atomique $\forall x(x \star x^{-1} = e)$.

Termes et formules On appelle terme tout arbre construit inductivement à partir des variables (qui sont des feuilles), des symboles de constantes et des symboles de fonction en respectant leur arité.

On définit les formules atomiques et les formules comme suit :

- si r est un symbole de relation d'arité a et si $t_1, \dots, t_a$ sont des termes, alors l'arbre donné ici en écriture préfixe $rt_1 \dots t_a$ est une formule atomique ;
- si ϕ est une formule atomique **ou non** et si x est une variable, alors $\forall x\phi$ et $\exists x\phi$ sont des formules (non nécessairement atomiques) ;
- si ϕ et ψ sont des formules atomiques **ou non**, alors $\neg\phi$, $\phi \wedge \psi$, $\phi \vee \psi$, $\phi \rightarrow \psi$ et $\phi \leftrightarrow \psi$ sont des formules (non nécessairement atomiques).

Variable liée, libre ; formule close Dans les formules $\forall x\phi$ et $\exists x\phi$, l'occurrence de la variable x située juste après le quantificateur est liée par celui-ci, tout comme les occurrences de x dans ϕ . Les occurrences d'une variable dans une formule qui ne sont pas ainsi liées sont dites libres. On dit qu'une variable est libre (resp. liée) dans une formule quand elle a au moins une occurrence libre (resp. liée) dans cette formule.

Par exemple, dans la formule $y \star y = e \wedge \forall x(x \star e = x)$, la variable x est liée tandis que la variable y est libre.

Une variable peut être à la fois libre et liée dans une formule : dans la formule $y \star y = e \wedge \forall y(y \star e = y)$, la variable y est libre dans ses deux premières occurrences et liée dans les trois dernières. De telles formules sont maladroites et on évite en général de les considérer.

Une formule est close lorsqu'elle n'a aucune variable libre.

3.2 SÉMANTIQUE STANDARD

Sémantique informelle des formules closes On considère une signature L pour le calcul des prédicats. Une structure d'interprétation S sur cette signature est la donnée

- d'un ensemble non vide U appelé univers : implicitement, les quantificateurs $\forall$ et $\exists$ porteront sur U ;
- pour chaque symbole de constante c de L , d'un élément c^S de U ;
- pour chaque symbole de fonction f d'arité a de L , d'une fonction mathématique $f^S : U^a \rightarrow U$;
- pour chaque symbole de relation r d'arité a de L , d'une relation a -aire sur U : $r^S \subset U^a$, étant entendu qu'un a -uplet vérifie la relation lorsqu'il appartient à r^S .

En outre, le symbole d'égalité $=$, quand il est présent, est toujours interprété comme la relation d'égalité habituelle entre éléments de l'univers.

Une telle structure permet de donner un sens aux termes en appliquant les fonctions mathématiques f^S qui correspondent aux symboles de fonctions qui constituent le terme, aux formules atomiques en utilisant le sens habituel des quantificateurs $\forall$ et $\exists$, puis à toutes les formules comme en logique propositionnelle.

On dit qu'une structure d'interprétation S est un modèle de la formule close ϕ , et on note $S \models \phi$, lorsque ϕ s'interprète dans S comme un énoncé vrai.

▷ **Question 25.** On considère la signature $e, \cdot^{-1}, \star$ qui a été décrite plus haut. On considère Gr la conjonction des formules suivantes :

- $\forall x \forall y \forall z ((x \star y) \star z = x \star (y \star z))$
- $\forall x (x \star e = x \wedge e \star x = x)$
- $\forall x (x \star x^{-1} = e \wedge x^{-1} \star x = e).$

Comment appelle-t-on les structures d'interprétation qui sont des modèles de Gr ? Donnez-en un exemple. ◁

Pour deux formules closes ϕ et ψ sur la même signature prédictive L , on dit que ψ est une conséquence sémantique de ϕ , et on note $\phi \models \psi$, lorsque tout modèle de ϕ est un modèle de ψ .

▷ **Question 26.** On reprend les notations de la question précédente.

1. Montrez sans formalisme que $Gr \models \forall x ((x^{-1})^{-1} = x)$.
2. On considère la formule Ab suivante : $\forall x \forall y (x \star y = y \star x)$. Montrez sans formalisme qu'on n'a ni $Gr \models Ab$ ni $Gr \models \neg Ab$.

◁

Formalisation de la sémantique Il est nécessaire de donner également une sémantique pour les formules non closes. On appelle valuation pour la structure d'interprétation S (dont on note l'univers U) toute fonction $\sigma : \mathcal{X}_{\text{libre}} \rightarrow U$. On étend inductivement σ à l'ensemble des termes à l'aide de l'interprétation que donne S des symboles de fonctions : $\sigma(ft_1 \dots t_a) = f^S(\sigma(t_1), \dots, \sigma(t_a))$.

Pour un symbole de relation r d'arité a et des termes $t_1, \dots, t_a$, on dit que $(S, \sigma) \models rt_1 \dots t_a$ si le a -uplet $(\sigma(t_1), \dots, \sigma(t_a))$ est dans r^S .

On dit que $(S, \sigma) \models \forall x \phi$ lorsque pour tout $o \in U$, $(S, \sigma_{x \mapsto o}) \models \phi$, avec $\sigma_{x \mapsto o} : y \mapsto \begin{cases} o & \text{si } y = x \\ \sigma(y) & \text{sinon} \end{cases}$.

De même, on dit que $(S, \sigma) \models \exists x \phi$ lorsque pour au moins un élément o de U , on a $(S, \sigma_{x \mapsto o}) \models \phi$.

On étend cette définition aux formules non atomiques par induction comme dans la sémantique standard du calcul propositionnel.

Lorsque la formule ϕ est close, il est clair que $(S, \sigma) \models \phi$ aura lieu pour toute valuation σ ou pour aucune : quand c'est le cas, on note alors $S \models \phi$.

4 DÉDUCTION NATURELLE POUR LE CALCUL DES PRÉDICATS

4.1 PRÉCAUTIONS À PRENDRE

Aux règles d'inférence de la logique propositionnelle, on va ajouter des règles qui permettent de manipuler les éléments de langage commun du calcul des prédicats. Lors de l'introduction d'un quantificateur, une variable libre devient liée, et inversement lors de l'élimination. Il faut prendre des précautions et restreindre l'application des nouvelles règles pour éviter que ce phénomène de capture/libération de variable n'intervienne d'une façon qui ne serait pas correcte pour la sémantique standard.

Dans toute la suite, ϕ, ψ désignent des formules, Γ un ensemble de formules, s, t des termes, x, y des variables.

On note $FV(\phi)$ l'ensemble des variables libres (free variables) de la formule ϕ . On étend cette notation à un ensemble de formules : $FV(\Gamma) = \bigcup_{\phi \in \Gamma} FV(\phi)$. Par abus, on note encore $FV(t)$ l'ensemble des variables du terme t , même si la précision qu'elles sont libres est superflue puisqu'un terme ne peut comporter de quantificateur.

On note $BV(\phi)$ l'ensemble des variables liées (bounded variables) de ϕ . On peut avoir $FV(\phi) \cap BV(\phi) \neq \emptyset$ même si en pratique on essaye d'éviter cette situation peu claire.

Pour ϕ une formule, x une variable et t un terme, on note $\phi[x \mapsto t]$ la formule ϕ dans laquelle toutes les occurrences libres de x ont été remplacées par t .

4.2 RÈGLES

Règles pour le quantificateur universel La règle d'introduction de $\forall$ est appelée règle de généralisation : si on a montré une propriété à propos d'un x sur lequel on n'a fait aucune hypothèse, alors on a montré la propriété pour tout x .

$$(I\forall) \frac{\Gamma \vdash \phi \quad x \notin FV(\Gamma)}{\Gamma \vdash \forall x \phi}.$$

▷ **Question 27.** Montrez que si on néglige la condition $x \notin FV(\Gamma)$, la règle d'introduction n'est pas correcte vis à vis de la sémantique standard. ◁

La règle d'élimination indique qu'on peut choisir un terme pour la variable quantifiée universellement, à condition que les quantificateurs présents dans ϕ ne lient pas les variables de t :

$$(E\forall) \frac{\Gamma \vdash \forall x \phi \quad FV(t) \cap BV(\phi) = \emptyset}{\Gamma \vdash \phi[x \mapsto t]}.$$

▷ **Question 28.** Montrez que si on supprime la restriction sur les variables, on obtient une règle incorrecte pour la sémantique standard. ◁

▷ **Question 29.** Montrez que si y est une variable qui n'apparaît pas dans ϕ , alors $\forall x \phi \vdash \forall y(\phi[x \mapsto y])$. ◁

Règles pour le quantificateur existentiel La règle d'introduction utilise un terme témoin : on construit un objet qui vérifie la propriété ; en logique intuitionniste c'est le seul moyen de prouver une existence.

$$(I\exists) \frac{\Gamma \vdash \phi[x \mapsto t]}{\Gamma \vdash \exists x \phi}.$$

La règle d'élimination ressemble à $(E\forall)$: l'objet dont on connaît l'existence doit permettre d'aboutir à une conclusion qui ne dépend pas de lui. Le témoin existentiel sur lequel s'appuie la preuve intermédiaire se fait avec une variable fraîche.

$$(E\exists) \frac{\Gamma \vdash \exists x \phi \quad \Gamma, \phi[x \mapsto y] \vdash \psi \quad y \notin FV(\Gamma \cup \{\phi, \psi\})}{\Gamma \vdash \psi}.$$

Règles pour l'égalité Lorsque le symbole de relation $=$ est présent, on se donne les deux règles suivantes :

$$(I=) \frac{}{\Gamma \vdash t = t}, \quad (L) \frac{\Gamma \vdash s = t \quad \Gamma \vdash \phi[x \mapsto s]}{\Gamma \vdash \phi[x \mapsto t]}.$$

Ces règles posent des difficultés algorithmiques importantes quand on écrit un système automatique de preuve : il est facile de tourner en rond en appliquant la règle (L) . Pour traiter l'égalité, ou plus généralement des relations d'équivalence, on tente de briser la symétrie en se donnant une façon de dire dans $s = t$ lequel des deux termes est plus "simple" que l'autre.

▷ **Question 30.** Montrez que $s = t \vdash t = s$ et que $s = t \wedge t = u \vdash s = u$. ◁