Corrigé du DM1

② On pose n la somme des indices des cases occupées et on montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$:

H_n = "J_2 a une stratégie gagnante ssi a et b sont pairs".

Si $n=0$ alors $a=b=0$, il n'y a pas de Pierre et J_2 est gagnant

Si $n=1$ alors $a=0$ et $b=1$, J_1 est gagnant car il n'y a qu'une seule pierre.

Soit $n \geq 1$ t.q $\forall p \leq n$, H_p vérifiée

Montrons H_{n+1} :

Cas1 a et b pairs.

. Si J_1 enlève une pierre alors la somme devient $n-i<n$ avec i la position de la pierre et a ou b devient impair donc par HR, le joueur dont c'est le tour, càd J_2, a une stratégie gagnante.

. S'il en enlève 2 en positions i et $i+1$, la somme devient $n-2i-1<n$ et a et b deviennent impairs ce qui permet de conclure de même par HR.

. S'il déplace une pierre à gauche, on a une somme qui vaut $n-1<n$ et a et b deviennent tous les deux impairs (l'un décroit et l'autre croit) donc on conclut encore par HR que J_2 a une stratégie gagnante.

cas 2 : a pair et b impair

le joueur 1 prend une pierre en position i avec i impair et on se retrouve avec une somme qui vaut $n-i < n$, a et b pairs et donc par HR le joueur dont c'est le tour c'est-à-dire J_2 est perdant ce qui signifie que J_1 a une stratégie gagnante

cas 3 : a impair et b pair.

pareil en prenant une pierre sur un indice pair.

cas 4 : a et b impairs (nb de pierres ≥ 2)

– S'il existe deux pierres collées, J_1 les prend faisant diminuer strictement la somme et ramenant le jeu à a et b pairs ce qui rend J_2 perdant et J_1 gagnant.

– Sinon, puisqu'il y a au moins deux pierres, un déplacement vers la gauche est possible au moins pour la pierre la plus à droite dans le jeu permettant de faire décroitre strictement la somme des indices des cases occupées et d'avoir a et b pairs (l'un décroit de un et l'autre croit de un) ce qui garantit par hypothèse de récurrence que J_1 a une stratégie gagnante