Mots de Bruijn

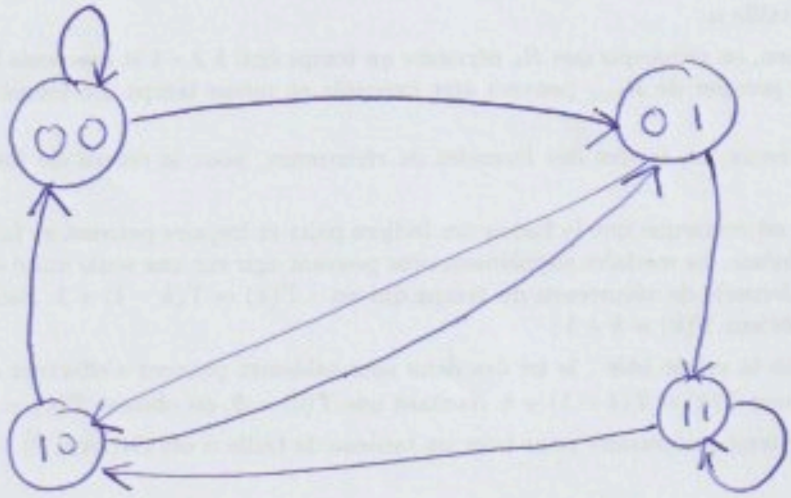
① Il existe $|\Sigma|^k$ mots distincts qui doivent être des facteurs distincts du mot b_k.

Un mot de longueur l dispose de l facteurs circulaires distincts de longueur k : un qui commence à chaque indice.

On conclut que si b_k existe, il est de longueur $|\Sigma|^k$.

② $b_1 = a_1 \cdots a_n$ où $\Sigma = \{a_1, \dots, a_n\}$ convient.

③



④ Si on considère un sommet, càd un mot de Σ^k et son suffixe ~~de~~ de longueur $k-1$ alors c'est le préfixe de $|\Sigma|$ sommets distincts. Le degré sortant de chaque sommet vaut donc $|\Sigma|$. On peut montrer que le degré entrant vaut $|\Sigma|$ aussi. Le graphe est fortement connexe : en effet si on considère $\alpha_1 \cdots \alpha_k$ et $\beta_1 \cdots \beta_k$ on remarque que

$$\begin{array}{c} \alpha_1 \cdots \alpha_k \to \alpha_2 \cdots \alpha_k \beta_1 \to \alpha_3 \cdots \alpha_k \beta_1 \beta_2 \cdots \to \alpha_k \beta_1 \cdots \beta_{k-1} \\ \downarrow \\ \beta_1 \cdots \beta_k \end{array}$$

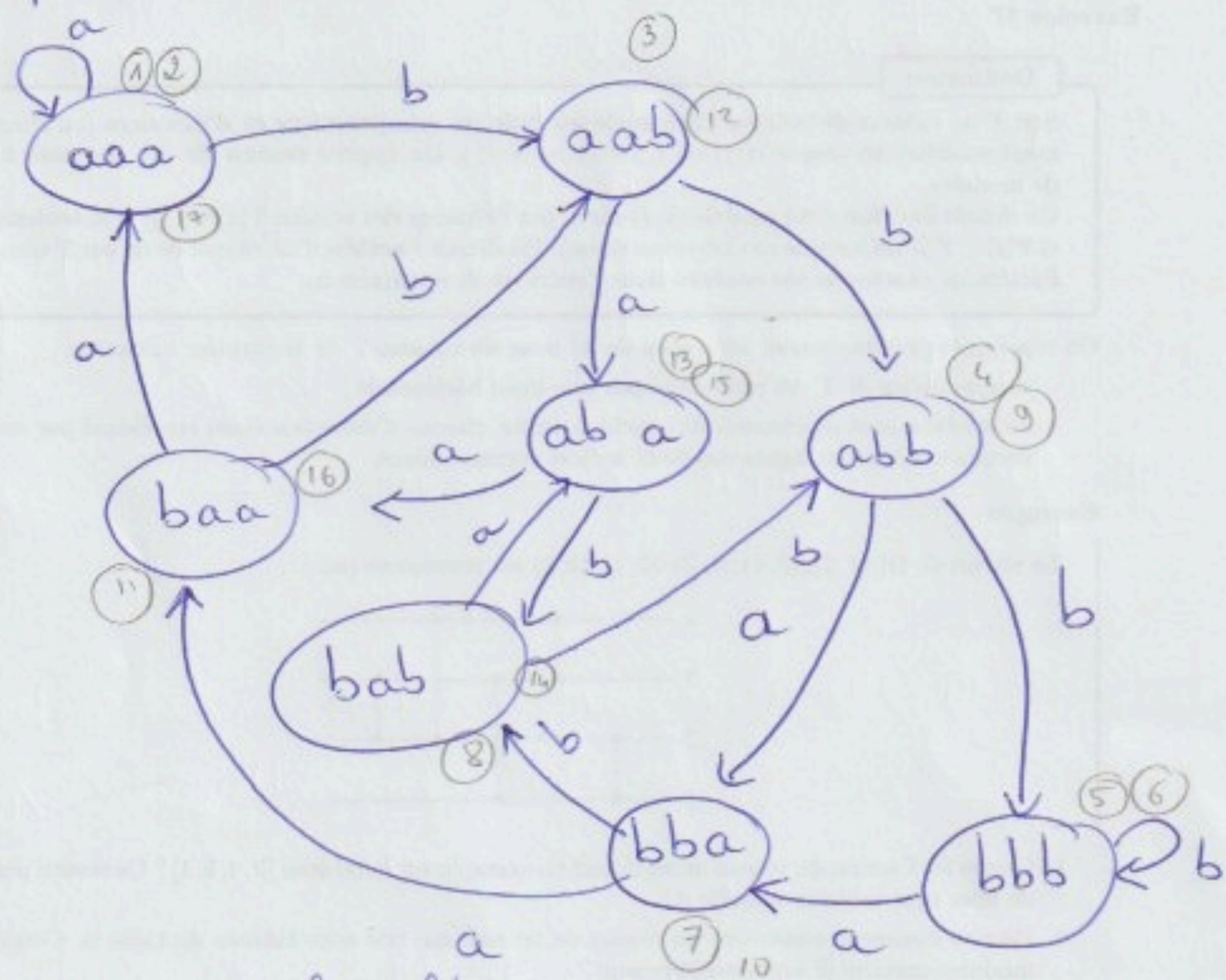
est un chemin du mot $\alpha_1 \cdots \alpha_k$ vers $\beta_1 \cdots \beta_k$.

Ainsi, le théorème d'Euler garantit l'existence d'un chemin eulérien.

⑤ On va étiqueter l'arête (u,v) par la dernière lettre de v. Si on considère un cycle eulérien, il est de longueur $|\Sigma|^k \times |\Sigma| = |\Sigma|^{k+1}$ et forme un mot dont on va montrer que c'est b_{k+1}.

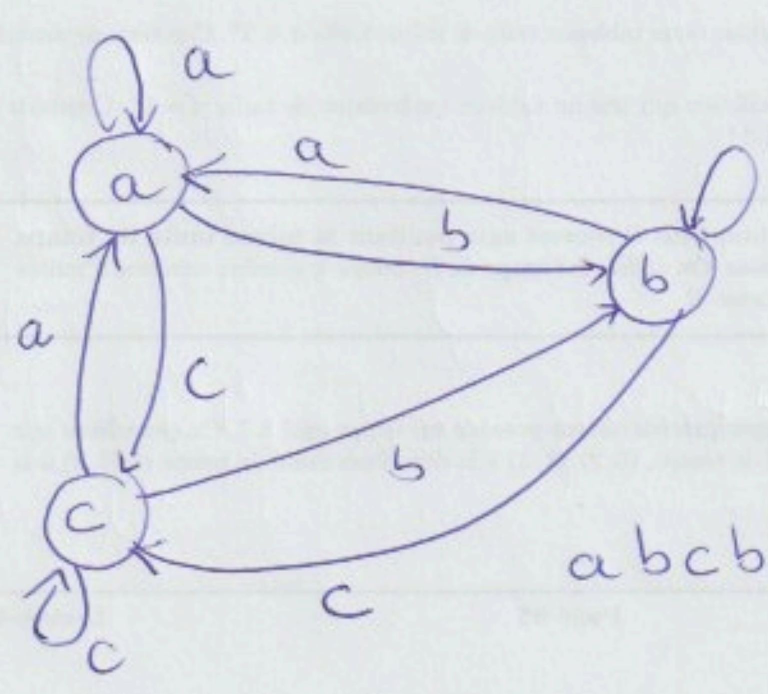
Lorsqu'un sommet est atteint dans le cycle alors le mot de ce sommet correspond aux k dernières lettres lues sur le chemin, de plus on passe $|\Sigma|$ fois par chacun de ces sommets et on enchaîne à chaque fois avec une arête (et donc une lettre) $\neq$. Ainsi chaque mot de $|\Sigma|^{k+1}$ est un facteur circulaire du mot du cycle. La longueur du mot garantit l'unicité de l'apparition de chacun d'entre eux.

⑥ On applique la descript° décrite dans la q° précédente.



On trouve un cycle eulérien qui donne

b_4 : abbbbabbaababaaa



abcbbacca $= b_2$

convient

• (e) ⇒ (f) : si G est connexe minimal alors G est sans cycle (sinon on pourrait supprimer une arête sans perdre la connexité). Si, de plus, on rajoute une arête $\{x, y\} \notin E$, on crée un cycle, car il existait déjà un chemin de x à y.
• (f) ⇒ (a) : si G est sans cycle maximal, cela implique qu'il est connexe, sinon on peut rajouter une arête entre deux composantes connexes sans créer de cycle, ce qui contredit la maximalité.

~~Exercice~~ Thm d'Euler

Le sens direct de l'équivalence est le plus simple à montrer. En effet, G admettant un cycle eulérien, ce cycle passe en particulier par chaque sommet (car le graphe est fortement connexe). De plus, si on note $V = \{x_1, \dots, x_n\}$, un cycle eulérien peut s'écrire $c = x_{i_0}, x_{i_1}, \dots, x_{i_p}$ où $p = |E|$ et $i_0 = i_p$. Le degré entrant de x_i est le nombre de fois que x_i apparaît dans le cycle, de même que son degré sortant (moins 1 si $i = i_0$).

Réciproquement, montrons ce résultat par récurrence sur $p = |E|$.
• Si $p = 2$, alors G n'a que deux sommets et une arête pour chacune des deux paires possibles. Il existe bien un cycle eulérien.
• Supposons le résultat vrai pour $p \in N^*$ fixé. Soit $G = (V, E)$ un graphe orienté vérifiant les hypothèses tel que $|E| = p+1$. G étant fortement connexe, il existe un cycle de longueur au moins 2 passant au moins une fois par chaque sommet et au plus une fois par chaque arête. En supprimant dans G les arêtes de ce cycle, on obtient m composantes fortement connexes $G_1 = (V_1, E_1), \dots, G_m = (V_m, E_m)$.

Montrons dans un premier temps qu'il n'existe aucune arête entre deux composantes fortement connexes. En effet, la suppression du premier cycle ne modifie pas la propriété d'égalité entre le degré entrant et sortant de chaque sommet. De plus, une arête entre deux sommets d'une même composante fortement connexe ne modifie pas la différence entre la somme des degrés entrants et sortants de tous les sommets de cette composante fortement connexe. Ainsi, s'il existe une arête entrant dans la composante fortement connexe G_i, alors il existe également une arête sortant de G_i. En itérant ce raisonnement, il sera possible par finitude de créer un cycle entre plusieurs composantes fortement connexes, ce qui est contradictoire avec leur définition.

Dès lors, les G_i vérifient les hypothèses de récurrence et on peut donc leur trouver un cycle eulérien. En adjoignant ces cycles au cycle initialement supprimé (ce qui est possible car ce cycle passe par chaque sommet), on obtient bien un cycle eulérien pour le graphe G, ce qui achève la récurrence.