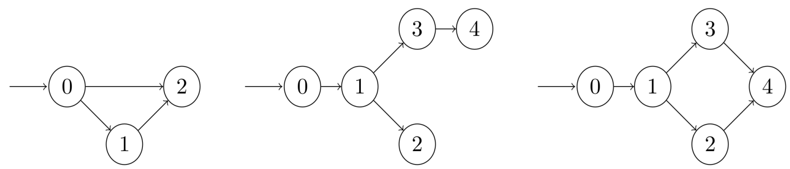
DM2 (à rendre le 26/09)

On définit un jeu de parcours de graphe par un triplet (S, T, s_0) où $T \subset S^2$ un ensemble de transitions et $s_0 \in S$ un état initial tel que (S, T) acyclique.

Une stratégie pour ce jeu est une fonction $\Phi : S \to S$ telle que pour tout $s \in S$ où Φ définie, on a $(s, \Phi(s)) \in T$.
On fait jouer deux joueurs J_1 et J_2 ayant chacun une stratégie respectivement Φ_1 et Φ_2 en les faisant jouer selon leur stratégie alternativement. On définit ainsi la séquence d'états $s_0, \Phi_1(s_0) = s_1, \Phi_2(s_1) = s_2, \phi_1(s_2) = s_3, \ldots,$ etc.
Le joueur perdant est le premier pour lequel la stratégie n'est plus définie. Une stratégie gagnante pour J_i est une stratégie qui garantit que le joueur gagne quand il joue suivant cette stratégie, quelle que soit la stratégie de l'adversaire.

1. Montrer que la séquence (s_k) est finie.
2. Construire l'arène bipartie correspondant aux jeux définis sur les graphes suivants :



3. Parmi les graphes précédents, existe-t-il des stratégies gagnantes pour un des joueurs depuis l'état initial ?
4. Soit (S, T, s_0) un jeu. Pour chacun de ses états $s \in S$, on définit sa valeur de Grundy $G(s) \in \mathbb{N}$ par $G(s) = \min(\mathbb{N} \setminus \{G(s') | (s, s') \in T\})$.
   (a) Quelle est la valeur de Grundy d'un puit du graphe?
   (b) Expliquer pourquoi cette relation définit G de manière unique. Dans quel ordre faudrait-il considérer les sommets pour pouvoir les étiqueter avec leurs valeurs de Grundy respectives?
   (c) Donner une condition nécessaire et suffisante sur $G(s)$ pour que le joueur 1 ait une stratégie gagnante depuis un sommet s.