$A_1 = (Q_1, q_0^1, F_1, \delta_1)$ $\quad$ $A_2 = (Q_2, q_0^2, F_2, \delta_2)$

AFD (complets) $\quad$ $\mathcal{L}(A_1) = L_1$ et $\mathcal{L}(A_2) = L_2$

$A = (Q_1 \cup Q_2, q_0^1, F_2, \delta, \varphi)$ avec $\forall q \in Q_1, \forall \alpha \in \Sigma,$

$\delta(q, \alpha) = \{\delta_1(q, \alpha)\}$

et $\forall q \in Q_2, \forall \alpha \in \Sigma$

$\delta(q, \alpha) = \{\delta_2(q, \alpha)\}$

$\forall q \in F_1, \varphi(q) = \{q_0^2\}$

et $\forall q \notin F_1, \varphi(q) = \emptyset$

- Soit $m \in L_1 \cdot L_2$ $\quad$ $\exists m_1 \in L_1$ et $m_2 \in L_2$ t.q $m = m_1 m_2$

Ainsi $\delta_1^*(q_0^1, m_1) \in F_1$ et donc

$\delta^*(q_0^1, m_1) = \cancel{K(\{\delta_1^*(q_0^1, m_1)\})} = \{\delta_1^*(q_0^1, m_1), q_0^2\}$

De plus $\delta_2^*(q_0^2, m_2) \in F_2$ donc

$$\delta^*(q_0^1, m_1 m_2) = \bigcup_{q' \in \delta^*(q_0^1, m_1)} \delta^*(q', m_2)$$

$$= \delta^*(\delta_1^*(q_0^1, m_1), m_2) \cup \underbrace{\delta^*(q_0^2, m_2)}_{\subset F_2 \text{ car c'est } \{\delta_2^*(q_0^2, m_2)\}}$$

on vient de m.q $L_1 \cdot L_2 \subset \mathcal{L}(A)$

- Soit $m \in \mathcal{L}(A)$ alors $\delta^*(q_0^1, m) \cap F_2 \neq \emptyset$

Les seules transitions entre A_1 et A_2 sont les ε transitions depuis les états de F_1 et q_0^2 donc

$\exists m_1 \in \Sigma^*$ t.q $\delta^*(q_0^1, m_1) \cap F_1 \neq \emptyset$ i.e $m_1 \in L_1$

et $\exists m_2 \in \Sigma^*$ t.q $\delta^*(q_0^2, m_2) \cap F_2 \neq \emptyset$ ie $m_2 \in L_2$

avec $m = m_1 \cdot m_2$

donc $m \in L_1 L_2$