Exercice 1 : FNC-SAT et n-COLOR *CCINP-A, 2023*

On appelle **littéral** une variable propositionnelle ou sa négation. On appelle **clause** une dijonction de plusieurs littéraux. On appelle **FNC** une conjonction de plusieurs clauses. Pour $n \in \mathbb{N}$, on dit qu'une formule logique est une n-FNC si c'est une FNC et que chacune de ses clauses contient au plus n littéraux. La clause vide est $\perp$, la FNC vide est $\top$. Ainsi, une 0-FNC vaut toujours $\perp$, sauf s'il s'agit de la FNC vide.

Q. 1 Pour chacune des formules logiques suivantes, dire s'il sagit d'une FNC, donner le cas échéant le $n \in \mathbb{N}$ minimum tel que la formule est une n-FNC, et dire dans tous les cas si la formule est satisfiable.

- $a)$ $(x_0 \vee x_1) \wedge \neg x_0 \wedge (x_0 \vee x_2)$
- $b)$ $\perp$
- $c)$ $(x_0 \vee \perp) \wedge (x_0 \vee x_1)$
- $d)$ $x_1 \vee x_0 \vee \neg x_0 \vee x_2$
- $e)$ $x_1 \wedge x_0 \wedge \neg x_0 \wedge x_2$
- $f)$ $(x_0 \to (x_1 \vee x_2)) \wedge (x_0 \to x_0)$

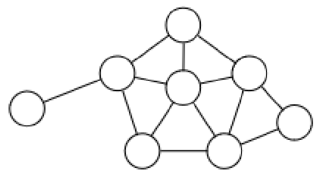
Q. 2 Donner la FNC de $(x_0 \to (x_1 \vee x_2)) \wedge \neg(x_1 \vee x_2)$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on appelle n-SAT le problème prenant en entrée une n-FNC et renvoyant si elle est satisfiable. On appelle FNC-SAT le problème prenant en entrée n'importe quelle FNC et renvoyant si elle est satisfiable.

Q. 3 À partir de quelle valeur de $n \in \mathbb{N}$ n-SAT est-il NP-complet ? *(Il n'est pas demandé une démonstration formelle mais plutôt des arguments permettant de justifier cette appartenance).*

On s'intéresse maintenant au coloriage d'un graphe.
À un graphe $G = (V, E)$ non orienté, on associe une fonction $\gamma = \begin{pmatrix} V & \to & \mathbb{N}^\star \\ u & \mapsto & \gamma(u) \end{pmatrix}$.
V étant fini, on peut trouver $n \in \mathbb{N}$ tel que $\gamma(V) \subseteq [\![1, n]\!]$. Si de plus, pour tout $\{a, b\} \in E,\ \gamma(a) \neq \gamma(b)$, on dit que G est n-**coloriable**. On note n-COLOR le problème consistant à dire si un graphe est n-coloriable.

Q. 4 Déterminer l'entier $n \in \mathbb{N}$ minimum pour que le graphe ci-contre est n-coloriable.



Pour $n \in \mathbb{N}^+$, pour un graphe $G = (V, E)$ colorié par γ (avec $\gamma(V) = [\![0, n1]\!]$), pour $i \in V$, $c \in [\![0, n1]\!]$, on pose $p_{i,c}$ la variable propositionnelle qui indique si $\gamma(i) = c$.

Q. 5 Pour $\{i, j\} \in E$, donner une condition indiquant que i et j ont des couleurs différentes. Donner alors une condition indiquant qu'aucun sommet de V n'a la même couleur d'un de ses voisins. Donner enfin une condition indiquant que le graphe G est n-coloriable (la condition précédente ne suffit pas, puisque chaque sommet doit être colorié, en effet, il suffirait sinon de mettre toutes les $p_{i,c}$ à $\perp$). En déduire que n-COLOR se réduit FNC-SAT.

Q. 6 n-COLOR est-il de classe NP ? À partir de quel $n \in \mathbb{N}$ le problème n-COLOR est-il NP-complet ?