Incomplétude de la déduction naturelle intuitioniste

0. Introduction

<u>Rappel</u> DNI contient les règles $\begin{cases} ax \\ \wedge i, \wedge é_g, \wedge é_d \\ \vee i_g, \vee i_d, \vee é \\ \to i \quad \to é \quad \text{(omises ici)}. \\ \neg i, \neg é \end{cases}$

Elle ne contient ni (abs), ni (te), ni ($\neg\neg é$).

Pour mémoire : $\boxed{\dfrac{\Gamma, A \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg A}\, i\neg}$ $\boxed{\dfrac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash \neg A}{\Gamma \vdash \bot}\, é}$

<u>Rappel</u> Un système de preuve est dit <u>correct</u> si ce qu'il prouve est validé par la sémantique, ie
$$\forall \Gamma \subseteq \mathcal{F}_p(Q),\ \forall G \in \mathcal{F}_p(Q),\quad \Gamma \vdash G \Rightarrow \Gamma \models G.$$

Un système de preuve est dit <u>complet</u> s'il permet de prouver tout ce qui est "vrai" selon la sémantique, ie
$$\forall \Gamma \subseteq \mathcal{F}_p(Q),\ \forall G \in \mathcal{F}_p(Q),\quad \Gamma \models G \Rightarrow \Gamma \vdash G.$$

<u>Idée</u> Pour MQ la DNI n'est pas complète, on va trouver une formule G telle que $\emptyset \models G$ mais $\emptyset \nvdash G$. Autrement dit on cherche une tautologie qu'on ne peut prouver...

Connaissant la DNC et la règle du tiers-exclu, on pense à la tautologie $G = x \vee \neg x$. ← elle est toujours vraie du fait de la sémantique dans $\mathbb{B}$.

Pour MQ DNI ne permet pas de prouver $\emptyset \vdash x \vee \neg x$, on va construire une <u>nouvelle sémantique</u> ie une interprétation des formules dans autre chose que $\mathbb{B}$... pour laquelle $x \vee \neg x$ n'est pas une tautologie et pour laquelle la DNI est correcte.
Ainsi s'il existait une preuve $\vdash x \vee \neg x$ en DNI, la sémantique vérifierait $\emptyset \models x \vee \neg x$, ABSURDE. CQFD. ← sous réserve de montrer et construire ce qu'on annonce

I. Éléments de topologie générale

1) Topologie

Déf Soit X un ensemble.
Soit $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{P}(X)$.
On dit que $\mathcal{O}$ est une <u>topologie</u> pour X si
- $\mathcal{O} \neq \emptyset$
- $\mathcal{O}$ est stable par union, ie pour tout ensemble I on a : $\forall (O_i)_{i \in I} \in \mathcal{O}^I$, $\left(\bigcup_{i \in I} O_i\right) \in \mathcal{O}$
- $\mathcal{O}$ est stable par intersec° finie

On dit alors que les éléments de $\mathcal{O}$ sont les <u>ouverts</u> de X. Les <u>fermés</u> sont les complémentaires des ouverts.

NB : on peut ê fermé et ouvert à la fois.

ex de topologie sur X ens quelconque.

$\{\emptyset, X\}$ topo grossière

$\mathcal{P}(X)$ topo discrète.

ex de topologie sur $\mathbb{R}$

les ouverts définis avec les boules ouvertes définies par une norme

$\downarrow$

donc dist

$\downarrow$

topologie métrique.

NB : L'union vide est $\emptyset$, donc $\emptyset \in \mathcal{O}$ nécessairement
L'intersec° vide est X, donc $X \in \mathcal{O}$ nécessairement

2) Intérieur d'un ensemble

Pté : Soit (X, Θ) un espace topologique.
Soit $A \subseteq X$.
Il existe un plus grand ouvert contenu dans A.
On le note $\mathrm{int}(A)$. pour $\subseteq$

démo On pose $B = \bigcup_{\substack{S \subseteq A \\ S \in \Theta}} S$ l'union de ts les ouverts contenus dans A.

Par construc° on a $B \subseteq A$.
Comme union d'ouverts, B est un ouvert.
Enfin c'est le + grand des ouverts contenus dans A car il contient, par construc°, tt ouvert contenu dans A.

Rmq $\mathrm{int}(A)$ est toujours un ouvert.
Si on note $\bar{\cdot}$ l'adhérence, ie le + petit fermé contenant, on a
$$\begin{cases} \mathrm{int}(A^c) = \bar{A}^c \\ \mathrm{int}(A)^c = \overline{A^c} \end{cases}$$

- En effet $\bar{A}^c$ est un ouvert comme comp. d'un fermé.
De plus $A \subseteq \bar{A}$ donc $\bar{A}^c \subseteq A^c$.
Enfin s'il existait $B \subsetneq A^c$ un ouvert + grand, ie contenu dans
tq $\begin{cases} (\bar{A}^c) \subsetneq B \\ B \subseteq A \end{cases}$, on aurait $A \subseteq B^c \subsetneq \bar{A}$, soit un fermé contenant A st. + petit que l'adh. ABS.

- De m̂, $\mathrm{int}(A)$ étant ouvert et $\subseteq A$, $\mathrm{int}(A)^c$ est un fermé et $A^c \subseteq \mathrm{int}(A)^c$, donc $\mathrm{int}(A)^c$ est un fermé contenant A^c, donc $\mathrm{int}(A)^c \subseteq \overline{A^c}$.
S'il existait B un fermé contenant A^c + petit, on aurait $A^c \subseteq B \subsetneq \mathrm{int}(A)^c$ donc $\mathrm{int}(A) \subsetneq B^c \subseteq A$, soit B^c un ouvert contenu ds A mais st + grand que $\mathrm{int}(A)$. ABS.

II. Sémantique de Tarski

On fixe dans toute cette partie | (X, Θ) un espace topo.
| Q un ens. de variables.

Déf Soit $\rho \in \mathcal{F}(Q, \Theta)$.

On définit la <u>sémantique de Tarski</u> dans Θ associée à ρ comme suit :

$$[\cdot]^\rho = \left(\begin{array}{ccc} \mathcal{F}_p(Q) & \longrightarrow & \Theta \\ Var(q) & \longmapsto & \rho(q) \\ \bot & \longmapsto & \emptyset \\ \top & \longmapsto & X \\ G \wedge H & \longmapsto & [G]^\rho \cap [H]^\rho \\ G \vee H & \longmapsto & [G]^\rho \cup [H]^\rho \\ \neg G & \longmapsto & \mathrm{int}\left([G]^{\rho\, c} \right) \end{array} \right)$$

$$G \to H \longmapsto [H]^\rho \cup \mathrm{int}\left([G]^{\rho\, c} \right)$$

Déf Soit $\Gamma \subseteq \mathcal{F}_p(Q)$ un ens fini de formules
Soit $G \in$ ——— .

On dit que G est <u>conséquence sémantique</u> de Γ pour la sémantique de Tarski, noté $\Gamma \models^{\text{Tarski}} G$ si

$$\forall \rho \in \mathcal{F}(Q, \Theta), \quad \bigcap_{H \in \Gamma} [H]^\rho \subseteq [G]^\rho$$

Pté La déduction naturelle, contenant les règles
ax, $\wedge i$, $\wedge e g$, $\wedge e d$, $\vee i g$, $\vee i d$, $\vee e$, $\neg i$, $\neg e$
est correcte pour la sémantique de Tarski, ie

$$\forall \Gamma \subseteq \mathcal{F}_p(Q) \quad \Gamma \vdash_{DN} G \implies \Gamma \models^{\text{Tarski}} G$$
$$\forall G \in \mathcal{F}_p(Q)$$

<u>Preuve</u> On montre par induction sur les arbres de preuves en DNi que $\underbrace{\text{si un arbre } T \text{ prouve } \Gamma \vdash G \text{ où } \Gamma \subseteq \mathcal{F}_p(Q),\ G \in \mathcal{F}_p(Q), \text{ alors } \Gamma \vDash G}_{\text{on dira en ce cas que "T est correct"}}$.

- Si $T = \boxed{\dfrac{}{\Gamma \vdash G}\,ax}$ alors par déf. de la règle d'axiome on a $G \in \Gamma$.
Donc pour tout $\rho \in \mathcal{F}(Q, \Theta)$, on a $\bigcap_{H \in \Gamma} [H]^\rho \subseteq [G]^\rho$. D'où $\Gamma \vDash G$.
Donc T est correct.

- Si T est de la forme $\boxed{\dfrac{T_1 \quad T_2}{\Gamma \vdash G}\,\wedge_i}$ où $\underbrace{T_1 \text{ et } T_2 \text{ sont corrects}}_{=\text{ hypothèse d'induction}}$,
alors par définition de la règle $\wedge_i$, il existe $(A,B) \in \mathcal{F}_p(Q)^2$ tq :
  → $G = A \wedge B$
  → T_1 prouve le séquent $\Gamma \vdash A$
  → T_2 ———————— $\Gamma \vdash B$

Soit $\rho \in \mathcal{F}(Q, \Theta)$. $[G]^\rho = [A]^\rho \cap [B]^\rho$ par déf de $[\cdot]^\rho$
Par correction de T_1 on a $\Gamma \vDash A$, donc $\bigcap_{H \in \Gamma} [H]^\rho \subseteq [A]^\rho$
———————— T_2 ———————— B ———————— $[B]^\rho$
On en déduit que $\bigcap_{H \in \Gamma} [H]^\rho \subseteq [A]^\rho \cap [B]^\rho = [G]^\rho$. D'où $\Gamma \vDash G$.
Donc T est correct.

- Si T est de la forme $\boxed{\dfrac{T_1}{\Gamma \vdash G}\,\wedge_{e,g}}$ où T_1 est correct,
alors par définition de la règle $\wedge_{e,g}$ il existe $(A,B) \in \mathcal{F}_p(Q)^2$ tq
  → $G = A$
  → T_1 prouve le séquent $\Gamma \vdash A \wedge B$

Soit $\rho \in \mathcal{F}(Q, \Theta)$. Par correction de T_1 on a $\Gamma \vDash A \wedge B$, donc en particulier
$$\bigcap_{H \in \Gamma} [H]^\rho \subseteq [A \wedge B]^\rho \underset{\text{par déf de } [\cdot]^\rho}{=} [A]^\rho \cap [B]^\rho \subseteq [A]^\rho = [G]^\rho.$$
Ceci étant pour ρ quelconque, on a bien $\Gamma \vDash G$.
Donc T est correct

- Si T est de la forme $\boxed{\dfrac{T_1}{\Gamma \vdash G}\,\wedge_{e,d}}$ où T_1 est correct, on montrerait de m̂ que T est correct.

- Si T est de la forme $\boxed{\dfrac{T_1}{\Gamma \vdash G}\ \vee_{i,d}}$ où T_1 est correct, alors

par définition de la règle $(\vee_{i,d})$, il existe $(A,B) \in \mathcal{F}_p(Q)^2$ tq
→ $G = A \vee B$
→ T_1 prouve le séquent $\Gamma \vdash A$.

Soit $\rho \in \mathcal{F}(Q,\mathcal{O})$. Par correction de T_1 on a $\Gamma \vDash A$, donc en particulier
$\bigcap_{H \in \Gamma} [H]^\rho \subseteq [A]^\rho$ or $[A]^\rho \subseteq [A]^\rho \cup [B]^\rho \underset{\text{par déf de } [\cdot]^\rho}{=} [A \vee B]^\rho = [G]^\rho$

On a donc $\bigcap_{H \in \Gamma} [H]^\rho \subseteq [G]^\rho$, et ceci étant pour ρ quelconque $\Gamma \vDash G$.
Donc <u>T est correct</u>.

- Si T est de la forme $\boxed{\dfrac{T_1}{\Gamma \vdash G}\ \vee_{i,g}}$ où T_1 est correct on montre de m̃ que T est correct.

- Si T est de la forme $\boxed{\dfrac{T_1 \qquad T_2 \qquad T_3}{\Gamma \vdash G}\ \vee_é}$ où T_1, T_2, T_3 sont corrects,

alors par déf. de la règle $(\vee_é)$, il existe $(A,B) \in \mathcal{F}_p(Q)^2$ tq
→ T_1 prouve le séquent $\Gamma \vdash A \vee B$
→ T_2 ——————— $\Gamma, A \vdash G$
→ T_3 ——————— $\Gamma, B \vdash G$.

Soit $\rho \in \mathcal{F}(Q,\mathcal{O})$. Notons $O_\Gamma = \bigcap_{H \in \Gamma} [H]^\rho$.
Par correction de T_1, on a $\Gamma \vDash A \vee B$, donc en particulier $O_\Gamma \subseteq [A \vee B]^\rho \underset{\text{par déf de } [\cdot]^\rho}{=} [A]^\rho \cup [B]^\rho$
On peut alors écrire
$$
\begin{aligned}
O_\Gamma &= O_\Gamma \cap ([A]^\rho \cup [B]^\rho) \\
&= (O_\Gamma \cap [A]^\rho) \cup (O_\Gamma \cap [B]^\rho) \\
&= \Big(\bigcap_{H \in \Gamma, A} [H]^\rho\Big) \cup \Big(\bigcap_{H \in \Gamma, B} [H]^\rho\Big)
\end{aligned}
$$

Or par correc° de T_2 on a $\Gamma, A \vDash G$, donc en particulier $\bigcap_{H \in \Gamma, A} [H]^\rho \subseteq [G]^\rho$
——————— T_3 ——————— B ——————— $\bigcap_{H \in \Gamma, B} [H]^\rho \subseteq$ ——

On en déduit que $O_\Gamma \subseteq [G]^\rho$, soit $\bigcap_{H \in \Gamma} [H]^\rho \subseteq [G]^\rho$.
Ceci étant pour tout ρ, on a bien $\Gamma \vDash G$.
Donc <u>T est correct</u>.

- Si T est de la forme $\boxed{\dfrac{T_1}{\Gamma \vdash G}\neg i}$ où T_1 est correct,

alors par définition de la règle $(\neg i)$ il existe $A \in \mathcal{F}p(Q)$ tq
→ $G = \neg A$
→ T_1 prouve le séquent $\Gamma, A \vdash \bot$

Soit $\rho \in \mathcal{F}(Q, \Theta)$. Par déf de $[\cdot]^\rho$, $[G]^\rho = \text{int}(([A]^\rho)^c)$.
Par correction de T_1, on a $\Gamma, A \vDash \bot$, donc en particulier
$\bigcap_{H\in\Gamma}[H]^\rho \cap [A]^\rho \subseteq [\bot]^\rho = \emptyset$.
En notant $O_\Gamma = \bigcap_{H\in\Gamma}[H]^\rho$ et $O_A = [A]^\rho$, on a $O_\Gamma \cap O_A = \emptyset$.

On veut MQ $O_\Gamma \subseteq \text{int}(O_A{}^c)$, par déf de l'intérieur il suffit de montrer que O_Γ est un ouvert contenu dans $O_A{}^c$.

- $O_H = \bigcap_{H\in\Gamma}[H]^\rho$ est une intersection finie d'ouverts et donc lui-m̂ un ouvert — car Γ fini, par déf des arbres de preuves.
- $O_\Gamma \subset O_A{}^c$ car $O_\Gamma \cap O_A = \emptyset$.

Ainsi on a bien $O_\Gamma \subseteq \text{int}(O_A{}^c) = [G]^\rho$, et ceci étant pour ρ quelconque on a $\Gamma \vDash G$. Donc T est <u>correct</u>.

- Si T est de la forme $\boxed{\dfrac{T_1 \qquad T_2}{\Gamma \vdash G}\neg e}$ où T_1 et T_2 sont corrects,

alors par définition de $\neg e$, il existe $A \in \mathcal{F}p(Q)$ tel que
→ $G = \bot$
→ T_1 prouve le séquent $\Gamma \vdash A$
→ T_2 ——— $\Gamma \vdash \neg A$

Soit $\rho \in \mathcal{F}(Q, \Theta)$. Notons à nouveau $O_\Gamma = \bigcap_{H\in\Gamma}[H]^\rho$.
Par correction de T_1, $\Gamma \vDash A$ donc en particulier, $O_\Gamma \subseteq [A]^\rho$
——— T_2, ——— $O_\Gamma \subseteq \text{int}(([A]^\rho)^c) \subseteq ([A]^\rho)^c$ (par déf du int.)

Donc $O_\Gamma \subseteq [A]^\rho \cap ([A]^\rho)^c = \emptyset = [\bot]^\rho = [G]^\rho$. (déf de $[\cdot]^\rho$)
D'où $\Gamma \vDash G$.
Donc <u>T est correct</u>

III Incomplétude de la D.N.I

On fixe $\left|\begin{array}{l}(X,\Theta) = (\mathbb{R}, \{A\subseteq \mathbb{R} \mid A \text{ peut être couvert par des boules ouvertes}\})\\ Q = \{x\}\end{array}\right.$

ie la topologie sur $\mathbb{R}$ que vous connaissez.

On cherche à MQ $\emptyset \not\vdash_{DN} x \vee \neg x$, ie qu'il n'existe pas de preuve du séquent $\emptyset \vdash x \vee \neg x$ en D.N.I

Par l'abs. on suppose qu'il en existe une.

Par correc° de la D.N.I vis à vis de la sémantique de Tarski (pour la topologie sur $\mathbb{R}$), on en déduit que $\emptyset \models x \vee \neg x$.

Donc, $\forall \rho \in \mathcal{F}(\{x\}, \Theta)$, $\underbrace{\bigcap_{H\in\emptyset} [H]^\rho}_{\substack{=\mathbb{R} \\ \text{(intersec° vide)}}} \subseteq [x \vee \neg x]^\rho$

$= [x]^\rho \cup [\neg x]^\rho$

$= \rho(x) \cup \mathrm{int}(\rho(x)^c)$

choisir ρ ici revient à choisir l'ouvert O que l'on associe à x.

donc $\forall O \in \Theta$, $\mathbb{R} \subseteq O \cup \mathrm{int}(O^c)$

ce qui implique $\forall O \in \Theta$, $\mathrm{int}(O^c) \supseteq O^c$, or $\mathrm{int}(O^c) \subseteq O^c$

par déf de int

soit $\forall O \in \Theta$, O^c est ouvert.

Or on sait que ce n'est pas le cas !

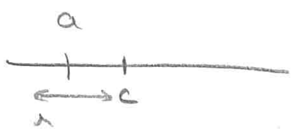
Ex pour $a \in \mathbb{R}$, $O =]-\infty, a[\in \Theta$

$O^c = [a, +\infty[\notin \Theta$.

En effet s'il existait $c \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{R}^{+*}$ tq $a \in \mathcal{B}(c,r) \subseteq O$

on aurait $|c-a| < r$ et $c \in O$ donc $c \geq a$

donc avec $\varepsilon = r - (c-a)$



on a $a' = a - \varepsilon/2$ qui vérifie $a' \in \mathcal{B}(c,r)$, $a' \notin O$

donc $\mathcal{B}(c,r) \not\subseteq O$ ABS.

On ne peut couvrir a par des boules ouverts sans déborder.