
Feuille d'exercices n°1 - Langages et expressions régulières

Notions abordées

- expressions régulières
- opérations régulières sur les langages
- préfixes, suffixes et facteurs
- relation d'équivalence sur des mots

Exercice 1 : Habitants d'expressions régulières

Q. 1 Donner tous les mots de taille 1, 2, 3 et 4 des langages réguliers suivants.

1. $((ab)^*|a)^*$
2. $(a((bb)^*|(a\emptyset))b)|\varepsilon$

Q. 2 Donner tous les mots de taille 1, 2 et 3 des langages réguliers suivants.

1. $(a|b)^*(a|c)^*$
2. $(ab)^*|(ac)^*$

Exercice 2 : Propriétés sur les opérations régulières

Soient A , B et C trois langages sur le même alphabet Σ .

Q. 1 Que valent les langages suivants ? On attend une écriture la plus explicite possible.

1. $\emptyset^*$
2. $\emptyset \cdot A$
3. $\{\varepsilon\} \cdot A$

Q. 2 Démontrer les propriétés suivantes.

1. $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
2. $A \subseteq B \Rightarrow A^* \subseteq B^*$
3. $(A^*)^* = A^*$
4. $A^* \cdot A^* = A^*$
5. $(A \cup B)^* = (A^* \cdot B^*)^*$
6. $A(B \cup C) = (AB) \cup (AC)$

Q. 3 Pour les couples de langages (L_1, L_2) définis ci-dessous donner la relation la plus précise possible entre L_1 et L_2 ($\subseteq$, $\supseteq$, $=$ ou aucune).

1. $L_1 = (A \cdot B)^*$ et $L_2 = (A^* B^*)$
2. $L_1 = (A \cdot B)^*$ et $L_2 = (A^* B^*)^*$
3. $L_1 = (A \cap B)^*$ et $L_2 = (A^* \cap B^*)$
4. $L_1 = (A \cup B)^*$ et $L_2 = (A^* \cup B^*)$
5. $L_1 = A \cdot (B \cap C)$ et $L_2 = (A \cdot B) \cap (A \cdot C)$
6. $L_1 = (A^* \cup B)^*$ et $L_2 = (A \cup B)^*$

Exercice 3 : Langages

Soit A un alphabet contenant la lettre b . Soit $X = \{b\}$ et $Y = (A \setminus \{b\}) \cdot \{b\}^*$.

- Q. 1 Décrire informellement les éléments de X^* , Y et Y^* .
- Q. 2 Montrer que tout mot de A^* commençant par une lettre distincte de b appartient à Y^* .
- Q. 3 Montrer que tout mot u de A^* s'écrit de façon unique sous la forme $u = vw$, où $v \in X^*$ et $w \in Y^*$.

Exercice 4 : Propriétés sur les mots

Dans tout cet exercice Σ désigne un alphabet.

- Q. 1 Soient u , v et w trois mots de Σ^* tels que u et v soient préfixes de w .
Montrer que u est préfixe de v ou v est préfixe de u .
- Q. 2 Soient a et b deux lettres de Σ et $u \in \Sigma^*$ tel que $au = ub$. Montrer que $a = b$ et $u \in a^*$.
- Q. 3 Soit $(x, y) \in \Sigma^* \times \Sigma^*$. Montrer que $xy = yx$ ssi il existe $z \in \Sigma^*$ tel que $x \in z^*$ et $y \in z^*$.
- Q. 4 Soit x et y deux mots de Σ^* . Montrer qu'il existe deux entiers non tous les deux nuls m et n tels que $x^m = y^n$ si et seulement s'il existe $z \in \Sigma^*$ tel que $x \in z^*$ et $y \in z^*$.
Indication : montrer que xy et yx sont préfixes de $x^n y^m$.
- Q. 5 Un mot non vide $u \in \Sigma^+$ est dit **primitif** s'il n'est puissance d'aucun mot autre que lui même, i.e. $\forall v \in \Sigma^*, \forall n \in \mathbb{N}, u = v^n \Rightarrow n = 1$. Établir que tout mot non vide est puissance d'un mot primitif unique.

Exercice 5 : Une équivalence sur les mots

Soit Σ un alphabet. On définit sur Σ^* la relation $\equiv$ suivante :

$$u \equiv v \stackrel{\text{déf}}{\Leftrightarrow} \exists (x, y) \in \Sigma^* \times \Sigma^*, u = x \cdot y \text{ et } v = y \cdot x$$

- Q. 1 Montrer que $\equiv$ est une relation d'équivalence.
- Q. 2 Montrer que $u \equiv v$ si et seulement s'il existe un mot w tel que $u \cdot w = w \cdot v$.
- Q. 3 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $u \equiv v$ si et seulement si $u^n \equiv v^n$.