Feuille d'exercices n°4 - Langages locaux, langages reconaissables

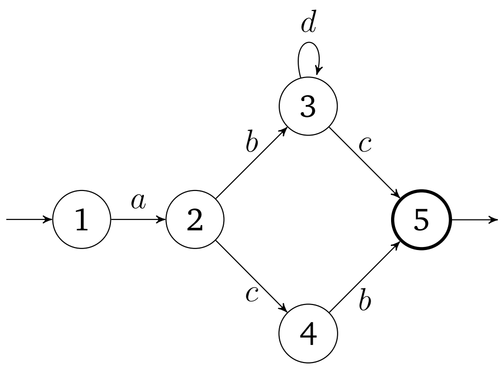
Notions abordées

- langages locaux
- application de l'algorithme de Berry-Sethi (pour obtenir l'automate de Glushkov)
- stabilité des langages reconnaissables
- utilisation du lemme de l'étoile

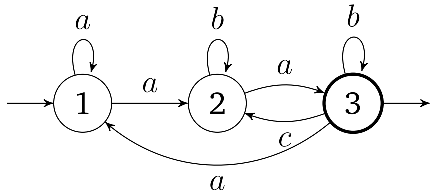
Exercice 1 : Des automates vers les expressions régulières

Q. 1 **En utilisant l'algorithme du cours**, donner, pour chacun des automates ci-dessous, une expression régulière reconnaissant le même langage.

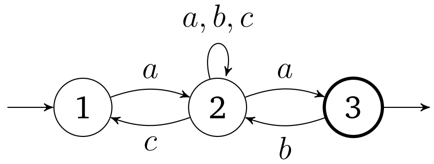
1.



2.



3.



Exercice 2 : Des expressions régulières vers les automates

Q. 1 **En utilisant l'algorithme du cours**, donner, pour chacune des expressions régulières ci-dessous, un automate reconnaissant le même langage.

1. $a(ab|b^\star)|a$
2. $(\varepsilon|a)^\star ab((a|b)^\star)$
3. $a(b|c)(ba|ab^\star)^\star$

Exercice 3 : Une caractérisation des langages locaux

Soit L un langage sur un alphabet Σ. On dit qu'un langage L vérifie ($\bigstar$) ssi

$$\forall (u, v, u', v') \in (\Sigma^\star)^4, \forall a \in \Sigma, (u \cdot a \cdot v \in L \text{ et } u' \cdot a \cdot v' \in L) \Rightarrow u \cdot a \cdot v' \in L$$

Q. 1 Montrer que si L est local, alors L vérifie ($\bigstar$). *On en déduit une manière de prouver qu'un langage n'est pas local par contraposée.*

Q. 2 Montrer que si L vérifie ($\bigstar$), alors il est local.

Q. 3 Montrer que le langage L des mots sur l'alphabet $\{a, b, c\}$ ne contenant pas à la fois des b et des c est un langage régulier. Est-il local ?

Q. 4 La classe des langages locaux est-elle stable par passage au complémentaire ? par intersection ?

Exercice 4 : Langages reconnaissables ou non

Pour chacun des langages ci-dessous, dire s'il est reconnaissable ou non. Dans le cas d'un langage reconnaissable, fournir un automate qui le reconnaît. Dans le cas contraire justifier qu'il n'est pas reconnaissable.

Q. 1 $L_1 = \{(ab)^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

Q. 2 $L_2 = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

Q. 3 $L_3 = \{a^n b^m \mid 0 \leqslant n < m\}$

Q. 4 $L_4 = \{u \mid |u|_a = |u|_b\}$

Q. 5 $L_5 = \left\{a^{n^3} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\}$

Q. 6 $L_6 = \{a^n \mid n \text{ est premier}\}$

Exercice 5 : Stabilités des langages reconnaissables

Q. 1 Le complémentaire d'un langage régulier est-il reconnaissable ?

Q. 2 On appelle **miroir** d'un mot $u = u_1 u_2 ... u_n$ le mot $u_n u_{n-1} ... u_2 u_1$, et par extension **miroir** d'un langage l'ensemble des miroirs des mots qu'il contient.
Montrer que si un langage est reconnaissable alors son miroir l'est aussi.

Q. 3 Si L est reconnaissable, l'ensemble des mots admettant un facteur dans L est-il reconnaissable ?

Q. 4 Si L est reconnaissable, l'ensemble des mots admettant un sous-mot dans L est-il reconnaissable ?

Q. 5 $\star$ Si L est un langage sur Σ, on définit $\sqrt{L} = \{u \in \Sigma^\star \mid u \cdot u \in L\}$.
Montrer que si L est reconnaissable alors $\sqrt{L}$ l'est aussi.

Q. 6 Le carré d'un langage L est défini comme étant $L_\square = \{uu \mid u \in L\}$.
Attention : à ne pas confondre avec $L \cdot L$.
Si L est reconnaissable, $L_\square$ est-il nécessairement reconnaissable ?

Exercice 6 : Limite du lemme de l'étoile

Le lemme de l'étoile donne une condition devant nécessairement être satisfaite par les langages reconnaissables. En effet le lemme de l'étoile énonce le résultat :

"*Pour tout langage L, si L est reconnaissable alors $\mathcal{P}(L)$ est vraie*"

où $\mathcal{P}(L)$ est la propriété ci-dessous.

$$\mathcal{P}(L) \overset{\text{déf}}{:} \exists n \in \mathbb{N}, \forall u \in L, |u| \geqslant n \Rightarrow \exists (x,y,z) \in \Sigma^\star \times \Sigma^+ \times \Sigma^\star, u = xyz \wedge |xy| \leqslant n \wedge \mathcal{L}(x \cdot y^* \cdot z) \subseteq L \quad (1)$$

Dans cet exercice on démontre que cette condition nécessaire $\mathcal{P}$ n'est **pas** une condition suffisante. Autrement dit, la propriété : "*Pour tout langage L, si $\mathcal{P}(L)$ est vraie alors L est reconnaissable*" est fausse. Afin de démontrer que cette propriété est fausse, il suffit de montrer que sa négation est vraie, à savoir "*Il existe un langage L tel que $\mathcal{P}(L)$ est vraie et L non reconnaissable*". Ainsi on cherche un langage L non reconnaissable et vérifiant la propriété $\mathcal{P}(L)$.

Les langages explicites de cet exercice sont définis sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$.

Q. 1 Justifier rapidement que $\{b^m c^n \mid n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}\}$ est reconnaissable.

Q. 2 Démonter que $L_0 \overset{\text{déf}}{=} \{a\, b^n\, c^n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ n'est pas reconnaissable.
On pourra utiliser ici le lemme de l'étoile.

Q. 3 Justifier **brièvement** que si L_1 et L_2 sont deux langages reconnaissables sur Σ, alors $L_1 \cap L_2$ l'est aussi.

Q. 4 À l'aide des question précédentes, montrer que $L_1 = \{a^m\, b^n\, c^n \mid m \in \mathbb{N}^*, n \in \mathbb{N}^*\}$ n'est pas reconnaissable. *On ne cherchera pas à appliquer le lemme de l'étoile à L_1.*

On définit le langage $L \overset{\text{déf}}{=} \underbrace{\{a^m\, b^n\, c^n \mid m \in \mathbb{N}^*, n \in \mathbb{N}^*\}}_{L_1} \cup \underbrace{\{b^m\, c^n \mid n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}\}}_{L_2}$.

Q. 5 À l'aide des questions précédentes, montrer que L n'est pas reconnaissable. *On ne cherchera pas à appliquer le lemme de l'étoile à L.*

Q. 6 Montrer que tout mot non vide $w \in L$ peut se décomposer en $x \cdot y \cdot z$ avec $|xy| = 1$ et $y \neq \varepsilon$ et de sorte que $\mathcal{L}(x \cdot y^* \cdot z) \subseteq L$.

Q. 7 Conclure.