Quelques problèmes de décisions classiques

1 Problèmes sur des formules logiques

On fixe $\mathcal{Q} = \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ un ensemble de variables propositionnelles.

$$\text{SAT} \quad \begin{cases} \textbf{Entrée :} \text{ Une formule de la logique propositionnelle sur } \mathcal{Q} : H \in \mathbb{F}_p(\mathcal{Q}) \\ \textbf{Sortie :} \ H \text{ est-elle satisfiable ?} \end{cases}$$

$$\text{CNF-SAT} \quad \begin{cases} \textbf{Entrée :} \text{ Une formule } H \in \mathbb{F}_p(\mathcal{Q}) \text{ sous forme normale conjonctive (FNC)} \\ \textbf{Sortie :} \ H \text{ est-elle satisfiable ?} \end{cases}$$

$$\text{2-SAT} \quad \begin{cases} \textbf{Entrée :} \text{ Une formule } H \in \mathbb{F}_p(\mathcal{Q}) \text{ donnée comme conjonction de 2-clauses} \\ \textbf{Sortie :} \ H \text{ est-elle satisfiable ?} \end{cases}$$

$$\text{3-SAT} \quad \begin{cases} \textbf{Entrée :} \text{ Une formule } H \in \mathbb{F}_p(\mathcal{Q}) \text{ donnée comme conjonction de 3-clauses} \\ \textbf{Sortie :} \ H \text{ est-elle satisfiable ?} \end{cases}$$

2 Problèmes de partitions

$$\text{SUBSETSUM} \quad \begin{cases} \textbf{Entrée :} \text{ Un entier } n \in \mathbb{N}\text{, une suite finie } (w_i)_{i \in [\![1,n]\!]} \in \mathbb{N}^n\text{, un entier } W \\ \textbf{Sortie :} \text{ Existe-t-il } I \subseteq [\![1,n]\!] \text{ tel que } \sum_{i \in I} w_i = W \text{ ?} \end{cases}$$

$$\text{PARTITION} \quad \begin{cases} \textbf{Entrée :} \text{ Un entier } n \in \mathbb{N}\text{, une suite finie } (w_i)_{i \in [\![1,n]\!]} \in \mathbb{N}^n \\ \textbf{Sortie :} \text{ Existe-t-il } I \subseteq [\![1,n]\!] \text{ tel que } \sum_{i \in I} w_i = \sum_{i \notin I} w_i \text{ ?} \end{cases}$$

$$\text{KNAPSACK} \quad \begin{cases} \textbf{Entrée :} \text{ Un entier } n \in \mathbb{N}\text{, deux suites finies } (p_i)_{i \in [\![1,n]\!]} \in \mathbb{N}^n \text{ et } (v_i)_{i \in [\![1,n]\!]} \in \mathbb{N}^n\text{,} \\ \qquad\qquad \text{un entier } P \in \mathbb{N} \text{ et un seuil } K \in \mathbb{N} \\ \textbf{Sortie :} \text{ Existe-t-il } I \subseteq [\![1,n]\!] \text{ tel que } \sum_{i \in I} p_i \leqslant P \text{ et } \sum_{i \in I} v_i \geqslant K \text{ ?} \end{cases}$$

$$\text{BINPACKING} \quad \begin{cases} \textbf{Entrée :} \text{ Un entier } n \in \mathbb{N}\text{, } (t_i)_{i \in [\![1,n]\!]} \in \mathbb{N}^n\text{, } C \in \mathbb{N}^* \text{ et un seuil } K \in \mathbb{N} \\ \textbf{Sortie :} \text{ Existe-t-il } \varphi : [\![1,n]\!] \to [\![1,K]\!] \text{ telle que } \forall i \in [\![1,K]\!], \sum_{j \in \varphi^{-1}(\{i\})} t_j \leqslant C \text{ ?} \end{cases}$$

3 Problèmes de couplage

$$\text{COUPLAGE} \quad \begin{cases} \textbf{Entrée :} \ G = (U \sqcup V, A) \text{ un graphe non orienté biparti.} \\ \textbf{Sortie :} \text{ Existe-t-il } \mathcal{M} \subseteq A \text{ tel que } \forall s \in U \sqcup V, \exists m \in \mathcal{M}, s \in m \end{cases}$$

$$\text{COUPLAGEMAX} \quad \begin{cases} \textbf{Entrée :} \ G = (U \sqcup V, A) \text{ un graphe non orienté biparti, } c : A \to \mathbb{N}\text{, un seuil } K \in \mathbb{N}. \\ \textbf{Sortie :} \text{ Existe-t-il } \mathcal{M} \subseteq A \text{ tel que } \forall s \in U \sqcup V, \exists m \in \mathcal{M}, s \in m \text{ tq } \sum_{m \in \mathcal{M} c(m) \leqslant K} \end{cases}$$

$$\text{3DM} \quad \begin{cases} \textbf{Entrée :} \text{ Trois ensembles finis } A, B, C, \mathcal{R} \subseteq A \times B \times C\text{, un seuil } K \in \mathbb{N}. \\ \textbf{Sortie :} \text{ Existe-t-il } \mathcal{M} \subseteq \mathcal{R} \text{ un 3DM de taille } \geqslant K \end{cases}$$

4 Problèmes sur les graphes non-orientés

CLIQUE
- **Entrée :** Un graphe non orienté $G = (S, A)$, un seuil $K \in \mathbb{N}$.
- **Sortie :** G admet-il une clique de taille $\geqslant K$?

STABLE
- **Entrée :** Un graphe non orienté $G = (S, A)$, un seuil $K \in \mathbb{N}$.
- **Sortie :** G admet-il un stable de taille $\geqslant K$?

COUV.SOMMETS
- **Entrée :** Un graphe non orienté $G = (S, A)$, un seuil $K \in \mathbb{N}$.
- **Sortie :** G admet-il une couverture par des sommets de taille $\leqslant K$?

COLORATIONMIN
- **Entrée :** Un graphe non orienté $G = (S, A)$, un seuil $K \in \mathbb{N}$
- **Sortie :** Existe-t-il une fonction totale $\varphi : S \to [\![1, K]\!]$ telle que $\forall i \in [\![1, K]\!], \varphi^{-1}(\{i\})$ est un stable de G ?

5 Problèmes de voyage sur les graphes

Un chemin est dit **hamiltonien** s'il passe exactement une fois par chaque sommet.
Un circuit est dit **hamiltonien** si privé de sa denière arrête c'est un chemin hamiltonien.

CHEMINHAMILTONIEN
- **Entrée :** Un graphe orienté $G = (S, A)$.
- **Sortie :** Existe-t-il un chemin hamiltonien dans G ?

CIRCUITHAMILTONIEN
- **Entrée :** Un graphe orienté $G = (S, A)$.
- **Sortie :** Existe-t-il un circuit hamiltonien (*i.e.* un tour) dans G ?

VOYAGEURCOMMERCE
- **Entrée :** Un graphe orienté $G = (S, A)$, $d \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R}^+)$, un seuil $K \in \mathbb{N}$.
- **Sortie :** Existe-t-il un circuit hamilt. dont la longueur selon d est $\leqslant K$?

6 Problèmes concernant des systèmes linéaires

SYS.LIN.
- **Entrée :** Deux entiers n et m, $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{Z})$, $b \in \mathbb{Z}^m$
- **Sortie :** Le système $AX = b$ admet-il une solution dans $\mathbb{Z}^m$?

SYS.LIN.INEG
- **Entrée :** Deux entiers n et m, $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{Z})$, $b \in \mathbb{Z}^m$
- **Sortie :** Le système $AX \leqslant b$ admet-il une solution dans $\mathbb{Z}^m$?

SYS.LIN.GÉNÉRALISÉ
- **Entrée :** Deux entiers n et m, $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{Z})$, $b \in \mathbb{Z}^m$, $\bowtie \in \{\leqslant, \geqslant, =\}^m$
- **Sortie :** Le système $AX \bowtie b$ admet-il une solution dans $\mathbb{Z}^m$?

PL
- **Entrée :** Deux entiers n et m, $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}^n$ et un seuil $K \in \mathbb{N}$
- **Sortie :** Existe-t-il $X \in \mathbb{R}^n$ tel que $AX \leqslant b$ et $c \cdot X \geqslant K$?

PLNE
- **Entrée :** Deux entiers n et m, $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}^n$ et un seuil $K \in \mathbb{N}$
- **Sortie :** Existe-t-il $X \in \mathbb{Z}^n$ tel que $AX \leqslant b$ et $c \cdot X \geqslant K$?