Feuille d'exercices n°6.1 - Classes de complexité P et NP

Notions abordées

- modélisation, problèmes de décision
- problèmes NP
- réduction polynomiale d'un problème à un autre
- plusieurs problèmes NP-difficiles classiques

Exercice 1 : Problèmes de partitions

On décrit en français 4 problèmes de décisions NP-complets classiques.

SubsetSum Étant donnés n entiers $w_1, w_2, \ldots, w_n$, et un entier W, on se demande si on peut sélectionner une partie des w_i dont la somme est exactement W.

Partition Étant donnés n entiers $w_1, w_2, \ldots, w_n$, on se demande s'il est possible de les partitionner en deux ensembles de même somme♣.

Knapsack Étant donnés n objets de poids $p_1, p_2, \ldots, p_n$ et de valeurs $v_1, v_2, \ldots, v_n$ ainsi qu'un poids maximal P et une valeur objectif K, on se demande s'il est possible de trouver un sous-ensemble d'objets dont la somme des valeurs est au moins K, sans dépasser le poids P.

BinPacking Étant donnés n objets de taille $t_1, t_2, \ldots, t_n$, C la capacité des boîtes, et K un nombre maximum de boîtes, on se demande s'il est possible de ranger les n objets dans au plus K boîtes en respectant la contrainte de capacité.

Q. 1 Proposer une définition formelle des quatre problèmes de décision décrits ci-avant.

Q. 2 On dit de manière informelle qu'un problème Q **est un cas particulier** d'un autre problème R, ou que R est une généralisation de Q, lorsque Q se réduit "très simplement"♡ au problème R. C'est par exemple le cas lorsque la fonction de réduction est l'identité. Montrer que :

a. le problème SubsetSum est un cas particulier du problème Knapsack,
b. le problème Partition est un cas particulier du problème Knapsack,
c. le problème Partition est un cas particulier du problème BinPacking.

Q. 3 Montrer que SubsetSum $\preccurlyeq_P$ Partition.

Q. 4 On souhaite démontrer que les 4 problèmes SubsetSum, Partition, Knapsack et BinPacking sont NP-difficiles. Quelle réduction polynomiale permetrait d'obtenir ce résultat ?
On ne demande pas de construire cette réduction car c'est l'objet de la question suivante.

♣. On note que cette somme est alors nécessairement la moitié de la somme totale des w_i.
♡. et donc en particulier en temps polynomial

Réduction polynomiale de 3-SAT à SubsetSum. On fixe une entrée du problème 3-SAT représentée par une famille de m 3-clauses $(c_j)_{i\in[\![0,m[\![}$ sur l'ensemble des variables propositionnelles $\mathcal{Q}=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$. Pour $i\in[\![1,n]\!]$ et $j\in[\![0,m[\![$, on note $x_i\in c_j$ le fait que le littéral x_i apparaisse dans la clause c_j, et on note $\neg x_i\in c_j$ le fait que le littéral $\neg x_i$ apparaisse dans la clause c_j. On considère les entiers $(a_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ et $(b_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ définis comme suit.

$$a_i=\sum_{j=0}^{m-1}\mathbb{1}_{x_i\in c_j}10^j+10^{m-1+i}$$
$$b_i=\sum_{j=0}^{m-1}\mathbb{1}_{\neg x_i\in c_j}10^j+10^{m-1+i}$$

Q. 5 Montrer que s'il existe un environnement propositionnel ρ tel que $\forall j\in[\![0,m[\![,\ [\![c_j]\!]^\rho=\mathsf{V}$, alors il existe un entier W dont l'écriture en base 10 est de la forme $w_{m+n-1}w_{m+n-2}\ldots w_m w_{m-1}\ldots w_1 w_0$ avec $\forall j\in[\![0,m[\![, w_j\in\{1,2,3\}$ et $\forall i\in[\![1,n[\![, w_{m-1+i}=1$, et deux sous-ensembles A et B de $[\![1,n]\!]$ tels que $\sum_{i\in A}a_i+\sum_{i\in B}b_i=W$.

Q. 6 Proposer deux familles d'entiers $(d_i)_{i\in[\![0,m[\![}$ et $(e_i)_{i\in[\![0,m[\![}$ telles qu'il existe un environnement propositionnel ρ vérifiant $\forall j\in[\![0,m[\![,\ [\![c_j]\!]^\rho=\mathsf{V}$ si et seulement s'il existe une suite extraite de $(a_1,a_2,\ldots,a_n,b_1,b_2,\ldots,b_n,d_0,d_1,\ldots,d_{m-1},e_0,e_1,\ldots,e_{m-1})$ dont la somme des termes vaut l'entier dont l'écriture décimale est $\underbrace{11\ldots1}_{n}\underbrace{33\ldots3}_{m}$.

Q. 7 Conclure quant à la NP-difficulté des problèmes.

Q. 8 Montrer que ces problèmes sont NP-complets.

Exercice 2 : Optimisation linéaire en nombres entiers

Avant d'introduire les problèmes qui vont nous intéresser dans cet exercice on précise quelques notations. Pour $(x,y)\in\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^m$, on note $x\leqslant y$ pour $\forall i\in[\![1,m]\!],\ x_i\leqslant y_i$. Si de plus $\bowtie\in\{\leqslant,\geqslant,=\}^m$, on note $x\bowtie y$ pour $\forall i\in[\![1,m]\!],\ x_i\ \bowtie_i y_i$.
On peut alors définir les trois problèmes de décision suivants.

$$\textsc{Sys.Lin.} : \begin{cases}\textbf{Entrée :} \text{ Deux entiers } n \text{ et } m,\ A\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{Z}),\ b\in\mathbb{Z}^m\\ \textbf{Sortie :} \text{ Le système } AX=b \text{ admet-il une solution dans } \mathbb{Z}^m\text{ ?}\end{cases}$$

$$\textsc{Sys.Lin.Ineg} : \begin{cases}\textbf{Entrée :} \text{ Deux entiers } n \text{ et } m,\ A\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{Z}),\ b\in\mathbb{Z}^m\\ \textbf{Sortie :} \text{ Le système } AX\leqslant b \text{ admet-il une solution dans } \mathbb{Z}^m\text{ ?}\end{cases}$$

$$\textsc{Sys.Lin.Généralisé} : \begin{cases}\textbf{Entrée :} \text{ Deux entiers } n \text{ et } m,\ A\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{Z}),\ b\in\mathbb{Z}^m,\ \bowtie\in\{\leqslant,\geqslant,=\}^m\\ \textbf{Sortie :} \text{ Le système } AX\bowtie b \text{ admet-il une solution dans } \mathbb{Z}^m\text{ ?}\end{cases}$$

Q. 1 Montrer que Sys.Lin. $\preccurlyeq_P$ Sys.Lin.Ineg.

Q. 2 Montrer que Sys.Lin.Ineg $\equiv_P$ Sys.Lin.Généralisé.

Q. 3 Justifier que Sys.Lin. $\in$ NP, Sys.Lin.Ineg $\in$ NP, Sys.Lin.Généralisé $\in$ NP.

Q. 4 Montrer que Sys.Lin.Ineg est NP difficile par réduction depuis CNF-SAT.

Exercice 3 : Clique, Stable et Couv.Sommets

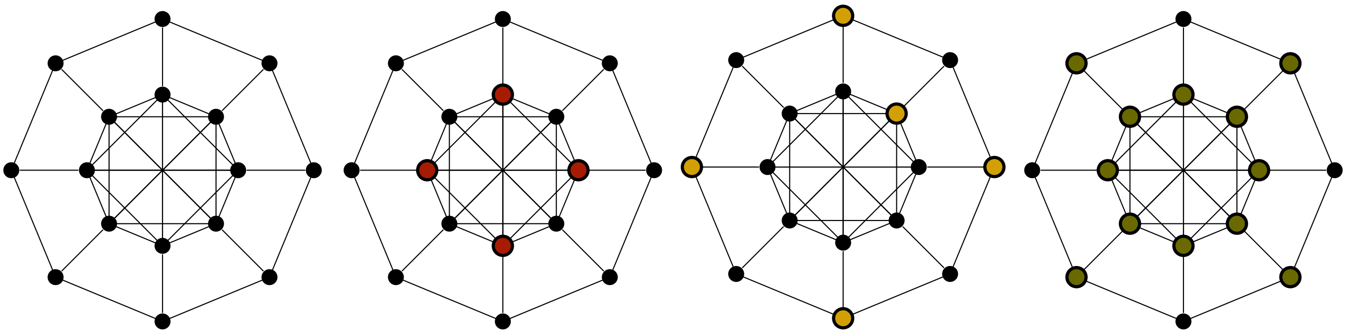
Dans cet exercice on s'intéresse à des problèmes de décision sur des graphes non orientés. Afin de définir ces problèmes, on donne d'abord quelques définitions.

Définition 0.1

Soit $G = (S, A)$ un graphe non orienté. Soit $S' \subseteq S$ un sous ensemble de sommets.

- *S' est une **clique** de G ssi $\forall (x, y) \in S' \times S'$, $x \neq y \Rightarrow \{x, y\} \in A$, autrement dit S' est une clique ssi les sommets de S' sont deux à deux reliés dans G.*
- *S' est un **stable** de G ssi $\forall (x, y) \in S' \times S'$, $\{x, y\} \notin A$, autrement dit S' est un stable ssi les sommets de S' sont deux à deux non reliés dans G.*
- *S' est une **couverture par des sommets** de G ssi $\forall \{x, y\} \in A$, $x \in S' \vee y \in S'$, autrement dit S' est une couverture ssi chaque arête de G a au moins une extrémité dans S'.*

*La **taille** d'une clique, d'un stable ou d'une couverture est son nombre de sommets.*



$G = (S, A)$ — Une clique de taille 4 — Un stable de taille 5 — Une couverture par sommets de taille 12

On remarque que, peu importe le graphe non orienté $G = (S, A)$, l'ensemble vide est toujours un stable et une clique de G, tandis que S est toujours une couverture par les sommets de G. On considère alors les trois problèmes de décision(non triviaux) suivants.

Clique : **Entrée :** Un graphe non orienté $G = (S, A)$, un seuil $K \in \mathbb{N}$. **Sortie :** G admet-il une clique de taille $\geqslant K$?

Stable : **Entrée :** Un graphe non orienté $G = (S, A)$, un seuil $K \in \mathbb{N}$. **Sortie :** G admet-il un stable de taille $\geqslant K$?

Couv.Sommets : **Entrée :** Un graphe non orienté $G = (S, A)$, un seuil $K \in \mathbb{N}$. **Sortie :** G admet-il une couverture par des sommets de taille $\leqslant K$?

Q. 1 Montrer que Clique $\preccurlyeq_P$ Stable et que Stable $\preccurlyeq_P$ Clique.

Q. 2 Montrer que Couv.Sommets $\preccurlyeq_P$ Clique et que Clique $\preccurlyeq_P$ Couv.Sommets

Réduction polynomiale de 3-SAT à Clique. On fixe une entrée du problème 3-SAT représentée par un ensemble $\{c_1, c_2, \ldots, c_m\}$ de clauses disjonctives sur l'ensemble des variables propositionnelles $\mathcal{Q} = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$. Pour $i \in [\![1, m]\!]$, la clause c_i est constituée de 3 littéraux, que l'on note $(l_{i,j})_{j \in \{0,1,2\}}$. On considère alors le graphe non orienté $G = (S, A)$ où S et A sont définis comme suit.

$$S \overset{\text{déf}}{=} \{(i, j) \mid i \in [\![1, m]\!], j \in \{0, 1, 2\}\} \tag{1}$$

$$A \overset{\text{déf}}{=} \{\{(i_1, j_1), (i_2, j_2)\} \mid l_{i_1,j_1} \neq \neg l_{i_2,j_2} \text{ et } \neg l_{i_1,j_1} \neq l_{i_2,j_2} \text{ et } i_1 \neq i_2\} \tag{2}$$

Q. 3 Représenter le graphe G pour l'instance $\{x \vee x \vee y, \neg x \vee \neg y \vee \neg y, \neg x \vee y \vee y\}$.

Q. 4 Montrer que CLIQUE est NP-difficile. On pourra utiliser la réduction suggérée ci-avant.

Q. 5 Montrer que CLIQUE, STABLE et COUV.SOMMETS sont NP-complets.