Feuille d'exercices n°8 - Arbres de preuves en logique propositionelle

Notions abordées

- déduction naturelle
- logique classique
- logique intuitioniste

Exercice 1 : Premiers arbres de preuves

Donner une preuve utilisant les règles de la déduction naturelle pour chacun des séquents suivants.

Q.1 $\vdash p \to p$

Q.2 $p, \neg p \vdash \bot$

Q.3 $p, q \vdash p \wedge q$

Q.4 $p \wedge q \vdash q \wedge p$

Q.5 $p \vee q \vdash q \vee p$

Q.6 $\vdash \neg(p \wedge \neg p)$

Exercice 2 : Divers arbres de preuves

Donner une preuve utilisant les règles de la déduction naturelle pour chacun des séquents suivants.

Q.1 $p \vee (p \wedge q) \vdash p$

Q.2 $p \wedge q, r \wedge s \vdash p \wedge s$

Q.3 $p, q \wedge r \vdash p \wedge q$

Q.4 $p \vdash \neg\neg p$

Q.5 $\neg\neg\neg p \vdash \neg p$

Exercice 3 : Lois de de Morgan

Donner une preuve utilisant les règles de la déduction naturelle pour chacun des séquents suivants.

Q.1 $\neg(p \vee q) \vdash \neg p \wedge \neg q$

Q.2 $\neg p \wedge \neg q \vdash \neg(p \vee q)$

Q.3 $\neg(p \wedge q) \vdash \neg p \vee \neg q$

Q.4 $\neg p \vee \neg q \vdash \neg(p \wedge q)$

Exercice 4 : Distributivités entre $\vee$ et $\wedge$

Donner une preuve utilisant les règles de la déduction naturelle pour chacun des séquents suivants.

Q.1 $p \wedge (q \vee r) \vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

Q.2 $(p \wedge q) \vee (p \wedge r) \vdash p \wedge (q \vee r)$

Q.3 $p \vee (q \wedge r) \vdash (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

Q.4 $(p \vee q) \wedge (p \vee r) \vdash p \vee (q \wedge r)$

Exercice 5 : Implications

Donner une preuve utilisant les règles de la déduction naturelle pour chacun des séquents suivants.

Q.1 $q \vdash p \rightarrow q$

Q.2 $p \wedge q \vdash p \rightarrow q$

Q.3 $p \rightarrow q \vdash p \rightarrow (p \wedge q)$

Q.4 $p \rightarrow q \vdash \neg q \rightarrow \neg p$

Q.5 $p \rightarrow r \vdash (p \wedge q) \rightarrow r$

Q.6 $\vdash p \rightarrow (q \rightarrow p)$

Q.7 $p \vdash (p \rightarrow q) \rightarrow q$

Exercice 6 : Implications (partie 1 : simplifications)

Donner une preuve utilisant les règles de la déduction naturelle pour chacun des séquents suivants.

Q.1 $p \rightarrow \neg p \vdash \neg p$

Q.2 $p \rightarrow q, \neg q \vdash \neg p$

Q.3 $p \rightarrow q, p \vee q \vdash q$

Q.4 $p \rightarrow q, p \rightarrow \neg q \vdash \neg p$

Q.5 $p \rightarrow (q \vee r), \neg q, \neg r \vdash \neg p$

Q.6 $p \rightarrow (q \rightarrow r), p, \neg r \vdash \neg q$

Q.7 $p \rightarrow (q \rightarrow r), p \rightarrow q, p \vdash r$

Q.8 $p \rightarrow (q \rightarrow r), q \rightarrow p \vdash q \rightarrow r$

Q.9 $p \rightarrow (p \rightarrow q), p \vdash q$

Exercice 7 : Implications (partie 2 : transformations)

Donner une preuve utilisant les règles de la déduction naturelle pour chacun des séquents suivants.

Q.1 $p \to q \vdash \neg q \to \neg p$

Q.2 $p \to q \vdash (p \wedge r) \to (q \wedge r)$

Q.3 $(p \wedge r) \to (q \wedge r), r \vdash p \to q$

Q.4 $p \to q \vdash (p \vee r) \to (q \vee r)$

Q.5 $(p \wedge q) \to r, \neg r \vdash p \to \neg q$

Q.6 $p \to q, r \to s \vdash (p \wedge r) \to (q \wedge s)$

Q.7 $p \to q, r \to s \vdash (p \vee r) \to (q \vee s)$

Q.8 $p \to (q \vee r), q \to s, r \to s \vdash p \to s$

Q.9 $p \to (q \to r) \vdash q \to (p \to r)$

Exercice 8 : Distributivités d'implications

Donner une preuve utilisant les règles de la déduction naturelle pour chacun des séquents suivants.

Q.1 $p \to (q \wedge r) \vdash (p \to q) \wedge (p \to r)$ et réciproquement.

Q.2 $(p \vee q) \to r \vdash (p \to r) \wedge (q \to r)$ et réciproquement.

Q.3 $(p \to q) \vee (p \to r) \vdash p \to (q \vee r)$ et réciproquement.

Q.4 $q \to r \vdash (p \to q) \to (p \to r)$

Exercice 9 : Trois autres équivalences classiques

Donner une preuve utilisant les règles de la déduction naturelle pour chacun des séquents suivants.

Q.1 $(p \wedge q) \to r \vdash p \to (q \to r)$ et réciproquement.

Q.2 $(p \wedge q) \to r \vdash (p \to r) \vee (q \to r)$ et réciproquement.

Q.3 $p \to (q \to r) \vdash (p \to r) \vee (q \to r)$ et réciproquement.

Exercice 10 : Utilisation de l'absurdité intuitionniste

Donner une preuve utilisant les règles de la déduction naturelle pour chacun des séquents suivants.

Q.1 $\neg\neg p, p \vee \neg p \vdash p$

Q.2 $\neg p \vdash p \to q$

Q.3 $p \vee q, \neg q \vdash p$

Q.4 $(p \vee r) \to (q \vee r), \neg r \vdash p \to q$

Q.5 $\neg(p \to q) \vdash q \to p$

Exercice 11 : Dérivations et absurdité intuitionniste

On dit qu'on dérive une règle R lorsqu'on donne une preuve qui aboutit au séquent conclusion de la règle R en construisant un arbre dont les feuilles sont des règles sans prémisses, ou des séquents prémisses de la règle R.

Q.1 On considère la règle de création d'implication

$$\frac{\Gamma \vdash \neg p}{\Gamma \vdash p \to q} \to_c$$

Dériver $(\bot_e)$ en utilisant cette règle.

Q.2 Dériver $(\bot_e)$ en utilisant $(\neg\neg_e)$. *i.e.* donner une preuve qui aboutit au séquent conclusion de la règle $(\bot_e)$ à partir des séquents prémisses de cette règle. Autrement dit, on donne un bout d'arbre de preuve utilisant la règle $(\neg\neg_e)$ qui pourrait remplacer l'utilisation de la règle $(\bot_e)$ dans un arbre de preuve.

Q.3 Dériver $(\bot_e)$ en utilisant (abs).

Q.4 Au vu de de la conséquence prouvée à la question 2, on se donne la nouvelle règle suivante de création d'implication.

$$\frac{\Gamma \vdash \neg p}{\Gamma \vdash p \to q} \to_c$$

Dériver $(\bot_e)$ en utilisant cette nouvelle règle $\to_c$. On pourra noter φ_0 la formule $\bot \to \bot$.

Exercice 12 : Implication et disjonctions en logique classique

Donner une preuve utilisant les règles de la déduction naturelle pour chacun des séquents suivants.

Q.1 $\neg p \to p \vdash p$

Q.2 $p \to q \vdash \neg p \vee q$

Q.3 $\neg p \vee q \vdash p \to q$

Q.4 $\neg q \to \neg p \vdash p \to q$

Q.5 $q \to r, \neg q \to \neg p \vdash p \to r$

Q.6 $p \vee q, \neg q \vee r \vdash p \vee r$

Q.7 $\neg(p \wedge q) \vdash \neg p \vee \neg q$

Q.8 $(p \wedge q) \to r \vdash (p \to r) \vee (q \to r)$

Q.9 $p \to (q \to r) \vdash (p \to r) \vee (q \to r)$

Q.10 $p \to (q \vee r) \vdash (p \to q) \vee (p \to r)$