Feuille d'exercices n°09 - Preuves en logique du premier ordre

Notions abordées
- syntaxe de la logique du premier ordre
- variables libres, liées, clotûre universelle, existentielle
- substitution dans des formules de la logique du premier ordre
- déduction naturelle en logique du premier ordre
- règles d'introduction et d'élimination des quantificateurs

Exercice 1 : Formalisation

Q. 1 Formaliser les énoncés suivants par des formules de la logique logique du premier ordre sans symbole de fonction et utilisant les prédicats suivants.

- etudiant d'arité 1
- raison d'arité 1
- humain d'arité 1
- elephant d'arité 1
- animal d'arité 1
- chien d'arité 1
- logicien d'arité 1
- gentil_avec d'arité 2,
- cherche d'arité 2,
- aime d'arité 2.

(1) *Tous les étudiants sont doués de raison.*
(2) *Seuls les êtres humains sont doués de raison.*
(3) *Aucun éléphant n'est doué de raison.*
(4) *Tous les animaux, sauf les chiens, sont gentils avec les logiciens.*
(5) *Chacun cherche un éléphant.*
(6) *Chaque individu aime quelqu'un et personne n'aime tout le monde.*

Exercice 2 : Variables libres et liées, clôture universelle

À partir de l'ensemble de symboles de variables $\mathcal{V} = \{w, x, y, z\}$, on définit les formules suivantes.

(F_1) $p(f(x,y)) \vee \forall z\, r(z,z)$
(F_2) $\forall x\, \exists y\, (r(x,y) \Rightarrow \forall z\, q(x,y,z))$
(F_3) $\forall x\, q(x,y,z) \wedge \forall z\, (q(z,y,x) \Rightarrow r(z,z))$
(F_4) $\forall y\, (p(f(g(x),y)) \wedge \forall x\, (r(g(z),x) \Rightarrow \exists z\, p(f(z,w))))$
(F_5) $\forall x\ (q(x,y,z) \Rightarrow \exists y\ (r(f(x,y),z) \vee \forall z\ (r(f(x,z),f(y,a)))))$
(F_6) $\forall x\ ((\exists z\, q(x,y,z)) \vee (\neg\forall y\ (r(f(x,y),z) \wedge r(f(x,z),f(y,a)))))$

Q. 1 Dessiner les arbres de syntaxe de ces formules.

Q. 2 Pour chacune de ces formules :
$a)$ déterminer l'ensemble des symboles de constante ;

$b)$ déterminer l'ensemble des symboles de fonctions et donner leurs arités respectives ;
$c)$ déterminer l'ensemble des symboles de prédicat et donner leurs arités respectives.

Q. 3 Pour chacune de ces formules :

$a)$ calculer l'ensemble des variables libres ;
$b)$ calculer l'ensemble des variables liées ;
$c)$ indiquer pour chaque occurence de variable libre le quantificateur dont elle dépen à l'aide d'une flèche de couleur sur l'arbre de syntaxe.

Q. 4 $a)$ Parmi ces formules, lesquelles sont des formules closes ?
$b)$ Donner une clôture universelle pour chacune de ces formules.
$c)$ Transformer si besoin les clôtures universelles de sorte qu'aucune variable ne soit à la fois libre et liée dans le même formule.

Exercice 3 : Substitution

Q. 1 Soient x, y, z et w des symboles de variables, f, g et h des symboles de fonctions d'arités respectives 2, 3 et 1, et enfin p et q des symboles de prédicats d'arité 2.

Calculer $G[x \to f(y, z)]$ pour :

1. $G = \forall x\ \exists z\ p(f(y, z), x)$
2. $G = \exists z\ p(f(y, z), x)$
3. $G = \forall y\ \exists z\ p(g(y, z, x), x)$
4. $G = (\forall w\ p(h(w), x)) \to (\forall x\ \forall z\ q(x, f(z, z)))$

Exercice 4 : Quelques arbres de preuves

Donner une preuve utilisant les règles de la déduction naturelle pour chacun des séquents suivants. Ici, φ représente à chaque fois une formule du premier ordre qu'on ne détaille pas. On pourra supposer qu'une formule précédée d'un quantifcateur sur une variable ne fait pas apparaître un nouveau quantificateur sur cette même variable. Par exemple, pour $\exists x, \varphi$ on peut supposer que x n'est pas liée dans φ (et même imaginer qu'elle est libre dans φ, ainsi φ pourrait être $p(x)$ ou bien $\exists y\, q(x, y)$...). De plus p et q sont des symboles de prédicat.

Q.1 $\forall x\ \varphi \vdash \exists x\, \varphi$

Q.2 $\exists t\, \forall x\, p(t, x) \vdash \forall y\, \exists x\, p(z, y)$

Q.3 $\forall x, \varphi \vdash \neg(\exists x, (\neg\varphi))$

Q.4 $\exists x, (\neg\varphi) \vdash \neg(\forall x, \varphi)$

Q.5 $\neg(\exists x, \varphi) \vdash \forall x, (\neg\varphi)$

Q.6 $\neg\Big(\forall x, (\neg\varphi)\Big) \vdash \exists x, \varphi$

Q.7 $\exists x\, p(x)\, ;\, \forall x\, \forall y\, \Big(p(x) \to q(y)\Big) \vdash \forall y\, q(y)$

Exercice 5 : Distributivité des quantificateurs

Donner une preuve utilisant les règles de la déduction naturelle pour chacun des séquents suivants.

Q.1 $\forall x(\varphi \wedge \psi) \vdash (\forall x\varphi) \wedge (\forall x\psi)$ et réciproquement.

Q.2 $\exists x(\varphi \wedge \psi) \vdash \exists x\varphi \wedge \exists x\psi$

Q.3 $(\forall x\varphi) \vee (\forall x\psi) \vdash \forall x(\varphi \vee \psi)$

Q.4 $\exists x(\varphi \vee \psi) \vdash (\exists x\varphi) \vee (\exists x\psi)$ et réciproquement.

Q.5 $\forall x(\varphi \rightarrow \psi) \vdash (\forall x\varphi) \rightarrow (\forall x\psi)$

Q.6 $\exists x(\varphi \rightarrow \psi) \vdash (\forall x\varphi) \rightarrow (\exists x\psi)$

Q.7 $\exists x(\varphi \wedge \psi), \forall x(\psi \rightarrow \theta) \vdash \exists x(\varphi \wedge \theta)$

Exercice 6 : Semi-distributivité des quantificateurs

Donner une preuve utilisant les règles de la déduction naturelle pour chacun des séquents suivants.
Dans cet exercice on suppose que x **n'est pas une variable libre dans** ψ et on prouve qu'on peut affecter un quantificateur à φ uniquement quand on l'applique à $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \vee \psi$ ou $\psi \rightarrow \varphi$.
Dans le cas de $\varphi \rightarrow \psi$, le quantificateur est inversé.

Q.1 $\forall x(\varphi \wedge \psi) \vdash (\forall x\varphi) \wedge \psi$ et réciproquement.

Q.2 $\exists x(\varphi \wedge \psi) \vdash (\exists x\varphi) \wedge \psi$ et réciproquement.

Q.3 $\forall x(\varphi \vee \psi) \vdash (\forall x\varphi) \vee \psi$, et réciproquement.

Q.4 $\exists x(\varphi \vee \psi) \vdash (\exists x\varphi) \vee \psi$ et réciproquement.

Q.5 $\forall x(\psi \rightarrow \varphi) \vdash \psi \rightarrow (\forall x\varphi)$ et réciproquement.

Q.6 $\psi \rightarrow (\exists x\varphi) \vdash \exists x(\psi \rightarrow \varphi)$ et réciproquement.

Q.7 $\forall x(\varphi \rightarrow \psi) \vdash (\exists x\varphi) \rightarrow \psi$ et réciproquement.

Q.8 $\exists x(\varphi \rightarrow \psi) \vdash (\forall x\varphi) \rightarrow \psi$ et réciproquement.

Exercice 7 : Logique classique du premier ordre

Donner une preuve utilisant les règles de la déduction classique pour chacun des séquents suivants.
En particulier, dans cet exercice l'usage des règles te, abs, $\neg\neg_{é}$ est possible.

Q.1 $\neg\Big(\exists x(\neg\varphi)\Big) \vdash \forall x\varphi$

Q.2 $\neg(\forall x\varphi) \vdash \exists x(\neg\varphi)$

Q.3 $\forall x(\neg\varphi) \vdash \neg(\exists x\varphi)$

Q.4 $\exists x\varphi \vdash \neg\Big(\forall x(\neg\varphi)\Big)$

Q.5 $\forall x(\varphi \vee \psi) \vdash (\forall x\varphi) \vee \psi$, x non libre dans ψ

Q.6 $\psi \rightarrow (\exists x\varphi) \vdash \exists x(\psi \rightarrow \varphi)$, x non libre dans ψ.

Q.7 $(\forall x\varphi) \rightarrow (\exists x\psi) \vdash \exists x(\varphi \rightarrow \psi)$

Q.8 $\vdash \exists x\Big(\varphi(x) \rightarrow \forall y\varphi(y)\Big)$