
Feuille d'exercices n°12.5 - Tri rapide

Exercice 1 : Correction du tri rapide

Le but de cet exercice est de démontrer la correction de l'algorithme de tri rapide tel qu'il est rappelé ci-dessous.

Algorithme 1 : Partitionner(T, d, f, p)

Entrée : Un tableau T indicé par $[\![0, n]\!]$, trois entiers d, f et p tels que $0 \leqslant d \leqslant p \leqslant f < n$
Sortie : Un indice $q \in [\![d, f]\!]$ tel que $T[q]$ vaut finalement la valeur qu'avait $T[p]$ avant l'appel
Effet : Le sous-tableau $T[\![d, f]\!]$ est permuté de sorte que $\begin{cases} \forall k \in [\![d, q]\!],\ T[k] \leqslant T[q] \\ \forall k \in]\!]q, f[\![,\ T[k] > T[q] \end{cases}$

```
pivot ← T[p] ;
échanger T[p] et T[d] ;                    // on place le pivot au début
a ← d + 1 ;
b ← f ;
tant que a ⩽ b faire
    si T[a] ⩽ pivot alors
        a ← a + 1
    sinon
        échanger T[a] et T[b] ;
        b ← b − 1 ;
échanger T[d] et T[a − 1] ;
retourner a − 1
```

Algorithme 2 : Procédure tri_rapide(T, d, f)

Entrée : Un tableau T indicé par $[\![0, n[\![$, deux entiers $d \leqslant 0$ et $f \leqslant n - 1$
Sortie : Aucune sortie, mais $T[\![d, f]\!]$ est triée par ordre croissant

```
si d < f alors
    p ← choix_pivot(T, d, f)               // choix d'un entier entre d et f ;
    q ← Partitionner(T, d, f, p) ;
    tri_rapide(T, d, q − 1) ;
    tri_rapide(T, q + 1, f)
```

Q. 1 Exécuter l'algorithme Partitionner sur le tableau T : `[0;1;5;3;4;2]` pour $d = 2$ et $f = 5$. Représenter l'état du tableau T à chaque étape ainsi que les valeurs des variables a et b.

Q. 2 Proposer un invariant[♣] de boucle pour Partitionner qui précise les valeurs possibles et surtout le rôle des variables a et b.

Q. 3 Démontrer que l'invariant proposé est bien un invariant de boucle.

♣. celui-ci peut être composé de plusieurs propriétés

Q. 4 On admet que tout au long de l'algorithme le tableau T est une permutation du tableau initial, et que cette éventuelle transformation ne concerne que des indices compris dans l'intervalle $[\![d, f]\!]$ (donc la partie de T extérieure à cet intervalle n'est pas modifiée). À l'aide de l'invariant proposé à la question précédente démontrer que l'algorithme Partitionner est correct.

Q. 5 En admettant la correction de l'algorithme Partitionner, démontrer que l'algorithme Tri_rapide est correct.