Feuille d'exercices n°15 - Jeux

Notions abordées
- jeu de Chomp, jeu des allumettes généralisé
- calcul des attracteurs
- algorithme MinMax (dont une version avec memoïsation)
- mesurer le temps en OCaml
- manipuler un dictionnaire en OCaml

Exercice 1 : Attracteurs pour le jeu des allumettes généralisé

On considère le jeu des allumettes généralisé et paramétré par deux entiers $n \in \mathbb{N}^\star$ et $k \in [\![1, n]\!]$.
- le jeu se déroule avec $n \in \mathbb{N}^\star$ allumettes initiales ;
- à son tour, chaque joueur doit prendre entre 1 et k allumettes.

Le jeu présenté en classe est donc le jeu pour les paramètres $n = 13$ et $k = 3$. On représente un état du jeu par un couple de $\{\mathsf{A}, \mathsf{B}\} \times [\![0, n]\!]$, qui donne le joueur dont c'est le tour de jouer et le nombre d'allumettes restantes. Alice commence la partie.

Dans la suite de cet exercice, on note $(\mathcal{A}_p)_{p \in \mathbb{N}}$ la suite des attracteurs d'Alice et $(\mathcal{B}_p)_{p \in \mathbb{N}}$ celle des attracteurs de Bob. On note alors $\mathcal{A} = \bigcup_{p \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_p$ et $\mathcal{B} = \bigcup_{p \in \mathbb{N}} \mathcal{B}_p$.

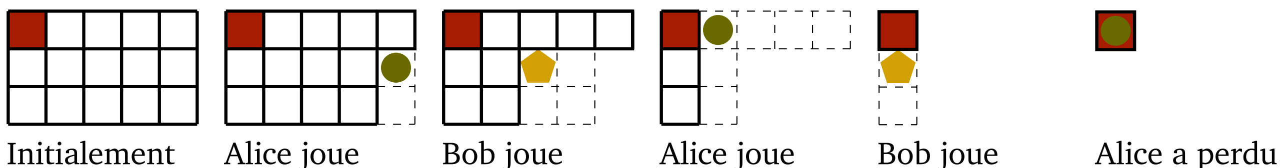
Q. 1 Montrer que le jeu des allumettes généralisé n'admet pas de partie nulle ni de partie infinie.

Q. 2 Démontrer que $\mathcal{A} = \{(\mathsf{A}, i) \mid i \in [\![0, n]\!], i \not\equiv 1[k+1]\} \cup \{(\mathsf{B}, i) \mid i \in [\![0, n]\!], i \equiv 1[k+1]\}$
et que $\mathcal{B} = \{(\mathsf{B}, i) \mid i \in [\![0, n]\!], i \not\equiv 1[k+1]\} \cup \{(\mathsf{A}, i) \mid i \in [\![0, n]\!], i \equiv 1[k+1]\}$.

Q. 3 En déduire qui de Alice et Bob admet une stratégie gagnante selon la valeur de n. Donner cette stratégie.

Exercice 2 : Chomp

Chomp est un jeu se jouant avec une tablette de chocolat de dimensions $n \times m$ (*i.e.* à n lignes et m colonnes). Chaque joueur, à son tour, doit choisir un carreau non encore mangé de la tablette, et doit manger tous les carrés se trouvant en dessous à droite de celui-ci (au sens large). Le carreau en haut à gauche est pimenté, celui qui doit le manger a perdu. Ci-dessous un exemple de déroulé d'une partie de Chomp sur une tablette 3×5.



Initialement | Alice joue | Bob joue | Alice joue | Bob joue | Alice a perdu

Q. 1 Quelle est la stratégie gagnante dans le cas d'une tablette de dimensions $1 \times m$ avec $m > 1$?

Q. 2 Proposer une représentation en machine d'un l'état du jeu, par exemple avec un type en C.

Q. 3 À l'aide d'un graphe qui décrit tous les coups possibles, trouver une stratégie gagnante pour une tablette 2×2.

Q. 4 Si la stratégie gagnante pour le cas $2 \times m$ avec m quelconque n'est pas claire, compléter le graphe de la question précédente pour qu'il représente le jeu pour une tablette initiale de taille 2×3 et décrire la stratégie gagnante.

Q. 5 On se propose d'étudier le cas $2 \times m$. Déterminer une stratégie gagnante.

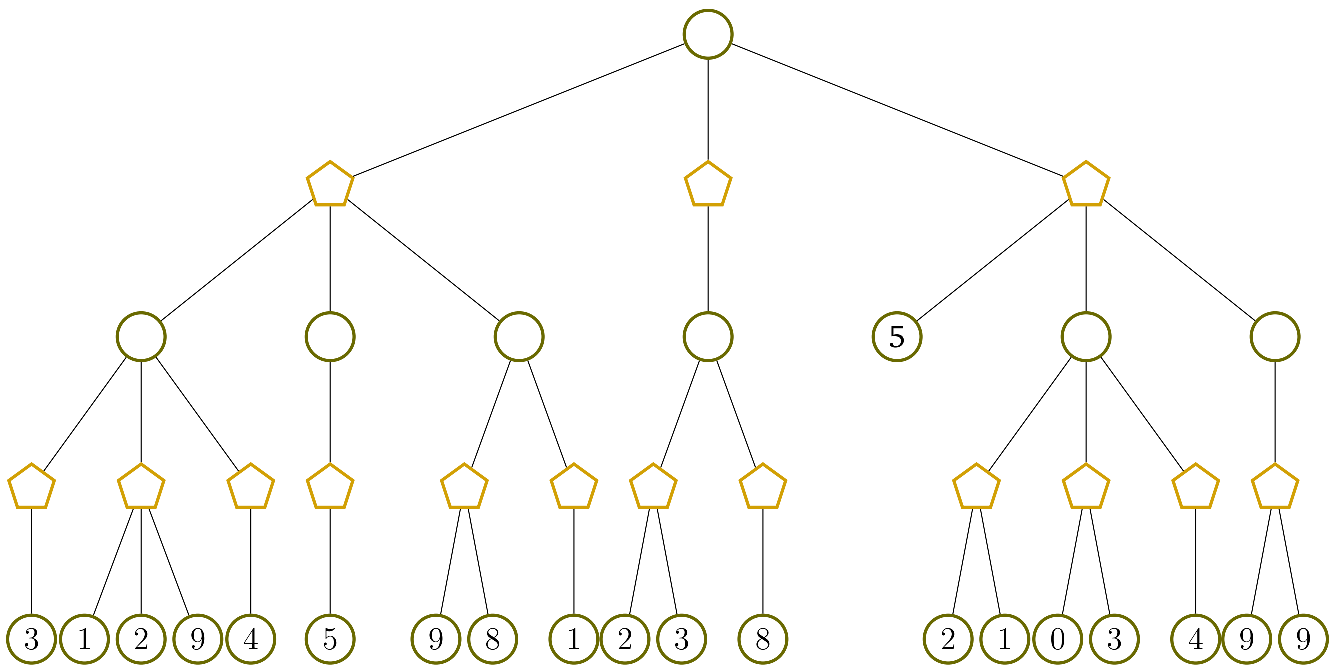
Q. 6 Montrer que quelle que soit la tablette initiale, l'un des deux joueurs possède une stratégie gagnante.

Q. 7 Déterminer une stratégie gagnante si la tablette est de dimensions $n \times n$.

Exercice 3 : Calcul de min-max

On prend comme convention dans cet exercice que le nœuds ronds représentent un état du jeu où c'est à Alice de jouer, tandis que ceux pentagonaux représentent un état où c'est à Bob de jouer. De plus on suppose que les scores sont donnés de sorte qu'Alice cherche à maximiser le score et Bob cherche à le minimiser. Autrement dit un score élevé représente une situation favorable à Alice.

Q. 1 Compléter l'arbre ci-dessous au moyen de l'algorithme du min-max.



On souhaite fournir une implémentation en OCaml de l'algorithme mis en oeuvre dans la question précédente. On définit donc le type suivant pour représenter les arbres de Min-Max.

```
type joueur = Alice | Bob

type mm_tree =
  | Leaf of joueur * int
  | Node of joueur * mm_tree list (* liste non vide *)
```

On remarque que dans de tels arbres les nœuds internes ne contiennent pas de valeurs. En effet seules les feuilles sont annotées avec une valeur, que l'on peut imaginer être celle fournie par une fonction d'heuristique. On souhaite "compléter" l'arbre, autrement dit associer une valeur à chaque nœud interne de l'arbre. On définit donc le type suivant pour représenter les arbres de Min-Max complétés.

```
type mm_tree_completed =
  | LeafC of joueur * int
  | NodeC of joueur * int * mm_tree_completed list (* liste non vide *)
```

À titre d'exemple le sous-arbre de hauteur 2 le plus à gauche de l'arbre de la question 1 est représenté au moyen de la valeur OCaml ci-dessous.

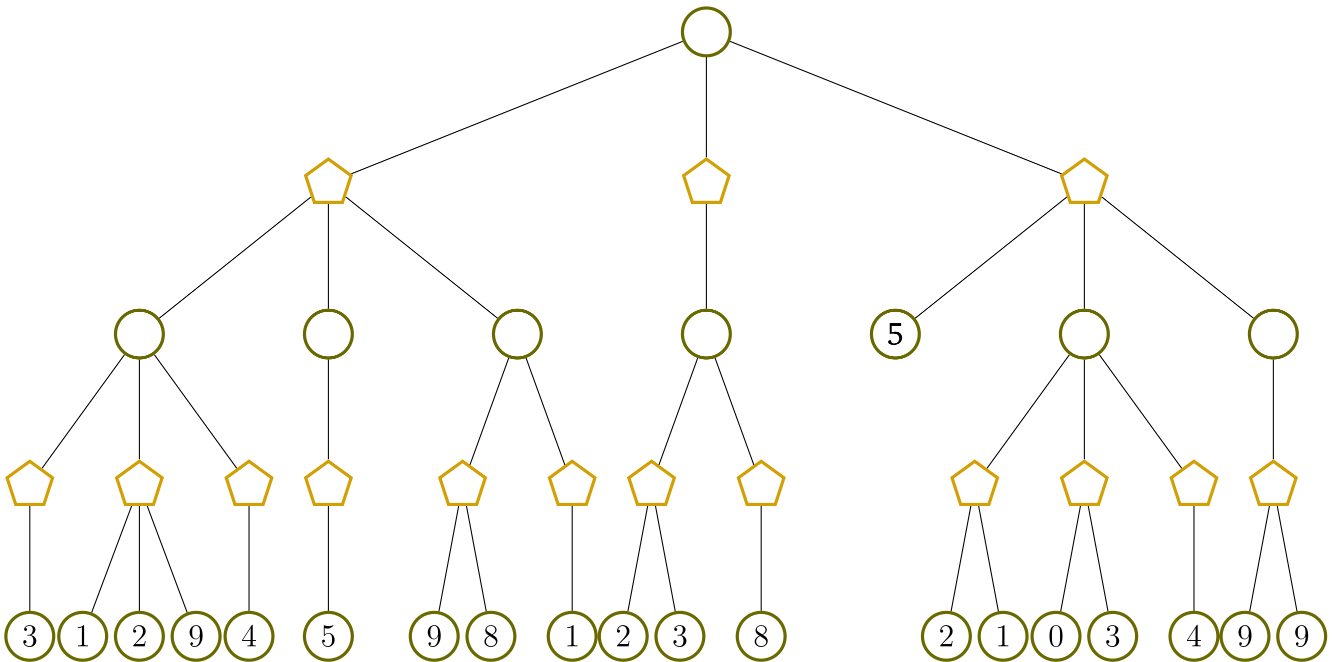
```
let ex =
  Node(Alice,[
      Node(Bob,[
          Leaf(Alice, 3)]);
      Node(Bob,[
          Leaf(Alice, 1); Leaf(Alice, 2); Leaf(Alice, 9)]);
      Node(Bob,[
          Leaf(Alice, 4)])])
```

Sa version complétée est quant à elle représentée par la valeur suivante.

```
let ex_c =
  NodeC(Alice, 4, [
      NodeC(Bob, 3, [
          LeafC(Alice, 3)]);
      NodeC(Bob, 1, [
          LeafC(Alice, 1); LeafC(Alice, 2); LeafC(Alice, 9)]);
      NodeC(Bob, 4, [
          LeafC(Alice, 4)])])
```

Q. 2 Proposer une fonction `complete_mm : joueur -> mm_tree -> mm_tree_completed` prenant en arguments un joueur j et un arbre de min-max, et qui retourne une version complétée de cet arbre lorsque c'est le joueur j qui cherche à maximiser son score.

Q. 3 Compléter l'arbre ci-dessous au moyen de l'algorithme du min-max **avec élagage** $\alpha - \beta$.



Q. 4 Proposer une fonction `lazy_score_tree : joueur -> mm_tree -> int` prenant en arguments un joueur j et un arbre de min-max et calculant, de manière **paresseuse grâce à l'élagage** $\alpha - \beta$, le score de cet arbre lorsque c'est le joueur j qui cherche à maximiser son score.

Exercice 4 : Calcul de Min-Max avec mémoïsation

Dans les exercices précédents nous avons appliqué l'algorithme du Min-Max de manière purement récursive et naïve, de sorte que l'arbre des appels récursifs pouvait présenter de nombreuses occurences des mêmes appels, autrement dit de sorte que l'algorithme pouvait être amené à refaire plusieurs fois les mêmes calculs. Pour le jeu des alumettes par exemples, il est clair qu'un même état peut être considéré plusieurs fois car il y a pluisieurs manières d'aboutir à cet état.

On se propose dans cet exercice de faire une étude statistique de ces recalculs dans le cas du jeu du morpion. Le jeu du morpion se joue sur une grille 3×3 de cases pouvant être ou bien vides, ou bien marquées par Alice, ou bien marquées par Bob. Initialment toutes les cases de la grille sont vides. Chaque joueur, à son tour, marque une case vide. Le jeu s'arrête lorsque trois cases alignées (*i.e.* sur une même ligne, une même colonne ou une même diagonale) sont marquées par le même joueur, jouer qui a alors gagné la partie.
Dans le fichier `compagnon.ml` on fournit :

- la définition d'un type `joueur` pour représenter les deux joueurs ;
- la définition d'un type `case` pour représenter l'état d'une case ;
- la définition d'un type `morpion` pour représenter les états du jeu (par un tableau de cases et un joueur) ;
- une fonction `est_gagnant : morpion -> joueur` permettant de tester si un état est gagnant pour un joueur ;
- une fonction `next : morpion -> morpion list` retournant la liste des états accessibles en un coup depuis un état donné.

Q. 1 Définir alors un algorithme "naïf" de min-max effectuant les appels récursifs jusqu'aux sommets terminaux. *On remarque que cela revient en fait au calcul des attracteurs. Un état à score strictement positif appartient à l'attracteur du joueur, un état à score strictement négatif appartient à l'attracteur de l'autre joueur, un état de score nul à aucun des deux.*

Q. 2 Enrichir la fonction précédente de manière à compter, pour chaque état du jeu, les appels récursifs sur cet état générés par l'algorithme du min-max. *On pourra utiliser le module* `Hashtbl` *pour définir une table de hachage globale, et incrémenter à chaque appel récursif sur une entrée* e *l'entier associé à l'entrée* e *dans cette table.*

Q. 3 Donner :

- le nombre total d'appels récursifs qui sont des recalculs ;
- le pire nombre de redondance d'appels récursifs ;
- la proportion des appels récursifs qui sont des recalculs.

Q. 4 Mettre en place, au moyen du module `Hashtbl`, une mémoïsation des appels de l'algorithme de min-max. Comparer expérimentalement les temps d'exécution des deux fonctions. *On pourra utiliser la fonction* `(Sys.time ())` *dont le fonctionnement est rappelé en fin d'exercice.*