

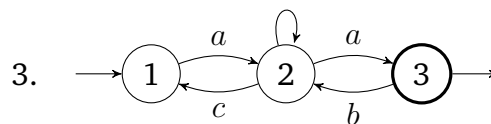
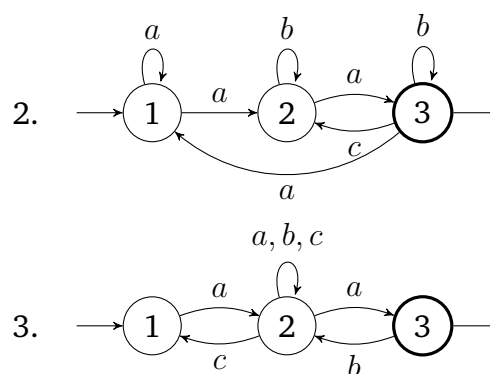
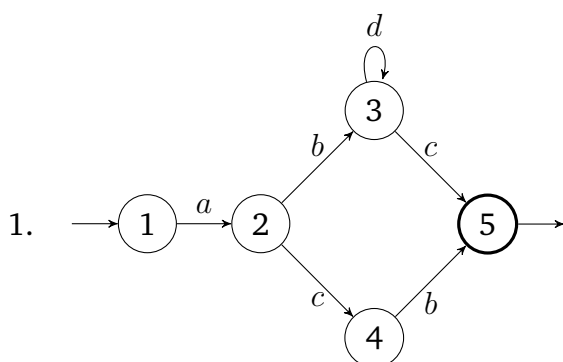
Feuille d'exercices n°3 - Langages locaux, langages reconnaissables

Notions abordées

- langages locaux
- application de l'algorithme de Berry-Sethi (pour obtenir l'automate de Glushkov)
- stabilité des langages reconnaissables
- utilisation du lemme de l'étoile

Exercice 1 : Des automates vers les expressions régulières

Q. 1 En utilisant l'algorithme du cours, donner, pour chacun des automates ci-dessous, une expression régulière reconnaissant le même langage.



Exercice 2 : Des expressions régulières vers les automates

Q. 1 En utilisant l'algorithme du cours, donner, pour chacune des expressions régulières ci-dessous, un automate reconnaissant le même langage.

1. $a(ab|b^*)|a$

2. $(\varepsilon|a)^*ab((a|b)^*)$

3. $a(b|c)(ba|ab^*)^*$

Exercice 3 : Une caractérisation des langages locaux

Soit L un langage sur un alphabet Σ . On dit qu'un langage L vérifie (★) ssi

$$\forall (u, v, u', v') \in (\Sigma^*)^4, \forall a \in \Sigma, (u \cdot a \cdot v \in L \text{ et } u' \cdot a \cdot v' \in L) \Rightarrow u \cdot a \cdot v' \in L$$

Q. 1 Montrer que si L est local, alors L vérifie (★). On en déduit une manière de prouver qu'un langage n'est pas local par contraposée.

Q. 2 Montrer que si L vérifie (★), alors il est local.

- Q. 3** Montrer que le langage L des mots sur l'alphabet $\{a, b, c\}$ ne contenant pas à la fois des b et des c est un langage régulier. Est-il local ?
- Q. 4** La classe des langages locaux est-elle stable par passage au complémentaire ? par intersection ?

Exercice 4 : Langages reconnaissables ou non

Pour chacun des langages ci-dessous, dire s'il est reconnaissable ou non. Dans le cas d'un langage reconnaissable, fournir un automate qui le reconnaît. Dans le cas contraire justifier qu'il n'est pas reconnaissable.

- Q. 1** $L_1 = \{(ab)^n \mid n \in \mathbb{N}\}$
- Q. 2** $L_2 = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$
- Q. 3** $L_3 = \{a^n b^m \mid 0 \leq n < m\}$
- Q. 4** $L_4 = \{u \mid |u|_a = |u|_b\}$
- Q. 5** $L_5 = \{a^{n^3} \mid n \in \mathbb{N}\}$
- Q. 6** $L_6 = \{a^n \mid n \text{ est premier}\}$
- Q. 7** D le langage des mots de parenthèses (sur l'alphabet $\Sigma = \{ (,) \}$ bien parenthésés. D est défini inductivement par :
- $\varepsilon \in D$;
 - Si $(u, v) \in D^2$ alors $uv \in D$;
 - Si $u \in D$ alors $(u) \in D$.
- Q. 8** O le langage des expressions OCAML (sur l'alphabet $\Sigma = \text{char}$).

Exercice 5 : Stabilités des langages reconnaissables

- Q. 1** Le complémentaire d'un langage régulier est-il reconnaissable ?
- Q. 2** On appelle **miroir** d'un mot $u = u_1 u_2 \dots u_n$ le mot $u_n u_{n-1} \dots u_2 u_1$, et par extension **miroir** d'un langage l'ensemble des miroirs des mots qu'il contient.
Montrer que si un langage est reconnaissable alors son miroir l'est aussi.
- Q. 3** Si L est reconnaissable, l'ensemble des mots admettant un facteur dans L est-il reconnaissable ?
- Q. 4** Si L est reconnaissable, l'ensemble des mots admettant un sous-mot dans L est-il reconnaissable ?
- Q. 5** Le carré d'un langage L est défini comme étant $L_{\square} = \{uu \mid u \in L\}$.
⚠ ATTENTION : à ne pas confondre avec $L \cdot L$.
Si L est reconnaissable, $L_{\square}$ est-il nécessairement reconnaissable ?
- Q. 6** Si L est un langage sur Σ , on définit $\sqrt{L} = \{u \in \Sigma^* \mid u \cdot u \in L\}$.
Montrer que si L est reconnaissable alors $\sqrt{L}$ l'est aussi.