Feuille d'exercices n°5.3 - Classes de complexité P et NP

Notions abordées

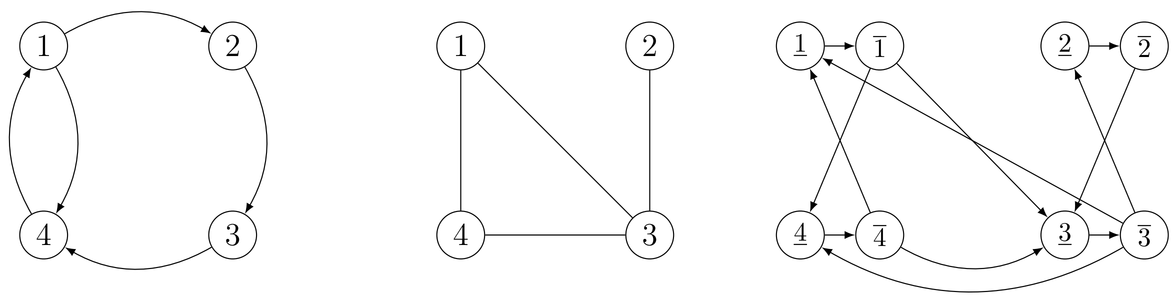
- montrer qu'un problème est NP
- réduction polynomiale d'un problème à un autre
- découverte de deux problèmes proches de part et d'autre de la frontière entre P et NP

Exercice 1 : FEEDBACK ARC SET (FAS)

On considère dans cet exercice le problème de décision FEEDBACK ARC SET♣ (abrégé en FAS) ci-dessous.

$$\text{FAS} : \begin{cases} \textbf{Entrée :} \text{ Un graphe orienté } G = (S, A), \text{ un seuil } K \in \mathbb{N}. \\ \textbf{Sortie :} \text{ Existe-t-il } R \subseteq A \text{ tel que } |R| \leqslant K \text{ et } (S, A \setminus R) \text{ est sans circuit ?} \end{cases}$$

Autrement dit, le problème FAS pose la question suivante : étant donné un graphe orienté et un entier K, existe-t-il K arcs du graphe tels qu'en les supprimant, le graphe devienne sans circuit.



(a) Graphe G_0 (b) Graphe G_1 (c) Graphe G_2

FIGURE 1 – Graphes exemples

Q. 1 On considère les graphes orientés G_0 et G_2 de la figure 1.

(i) Montrer que $(G_0, 1) \in \text{FAS}^+$.

(ii) Montrer que $(G_2, 2) \in \text{FAS}^+$.

(iii) Montrer que $(G_2, 1) \in \text{FAS}^-$.

Q. 2 Donner le problème d'optimisation dont FAS est le problème de décision associé. Justifier que ce problème d'optimisation est bien défini.

Q. 3 Montrer que le problème FAS est dans NP. On pourra supposer que les ensembles de sommets des graphes en entrée sont de la forme $S = [\![1, n]\!]$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$.

♣. ensemble d'arcs retours en français

Couverture par des sommets. Pour $G = (S, A)$ un graphe non orienté, on dit qu'un sous-ensemble de sommets $C \subseteq S$ est une **couverture par des sommets** de G dès lors que $\forall \{x, y\} \in A, x \in C$ ou $y \in C$. Autrement dit C est une couverture par des sommets dès lors que chaque arête de G a au moins une extrémité dans C. Le problème de décision Couv.Sommets est alors le suivant.

$$\text{Couv.Sommets} : \begin{cases} \textbf{Entrée :} \text{ Un graphe non orienté } G = (S, A) \text{, un seuil } K \in \mathbb{N}. \\ \textbf{Sortie :} \ G \text{ admet-il une couverture par des sommets de taille } \leqslant K\,? \end{cases}$$

On rappelle que ce problème de décision est NP-difficile[♣].

Q. 4 On considère le graphe G_1 de la figure 1b.

(i) Montrer que $(G_1, 2) \in \text{Couv.Sommets}^+$.

(ii) Montrer que $(G_1, 1) \in \text{Couv.Sommets}^-$.

Dans le reste de cet exercice, on cherche à montrer que le problème Fas est NP-difficile, par réduction polynomiale depuis le problème Couv.Sommets.
En s'inspirant de la transformation du graphe G_1 de la figure 1b en le graphe G_2 de la figure 1c, on définit la fonction de réduction polynomiale de Couv.Sommets vers Fas ci-dessous.

Algorithme 1 : Réduction

Entrée : $(G = (S, A), K)$ instance du problème Couv.Sommets

$S' \leftarrow \{\overline{s} \mid s \in S\} \cup \{\underline{s} \mid s \in S\}$;

$A' \leftarrow \{(\underline{s}, \overline{s}) \mid s \in S\} \cup \{(\overline{v}, \underline{u}) \mid \{u, v\} \in A\}$;

retourner $((S', A'), K)$

Pour les **Q. 5** et **Q. 6**, on fixe $(G = (S, A), K)$ une instance du problème Couv.Sommets, on nomme alors $(G', K') = \text{Réduction}(G, K)$ et $(S', A') = G'$.

Q. 5 Montrer que si $(G = (S, A), K) \in \text{Couv.Sommets}^+$ alors $\text{Réduction}(G, K) \in \text{Fas}^+$.

Q. 6 Montrer que si $\text{Réduction}(G, K) \in \text{Fas}^+$ alors $(G, K) \in \text{Couv.Sommets}^+$.

Q. 7 Conclure quant à la NP-complétude du problème Fas.

Q. 8 Que dire de la difficulté du même problème pour un graphe non orienté, c'est-à-dire du problème suivant.

$$\text{FasNo} : \begin{cases} \textbf{Entrée :} \text{ Un graphe non orienté } G = (S, A) \text{, un seuil } K \in \mathbb{N}. \\ \textbf{Sortie :} \text{ Existe-t-il } R \subseteq A \text{ tel que } |R| \leqslant K \text{ et } (S, A \setminus R) \text{ est acyclique ?} \end{cases}$$

♣. On a montré en TD que 3-SAT $\preccurlyeq_P$ Clique et que Clique $\preccurlyeq_P$ Couv.Sommets