Feuille d'exercices n°6 - Graphes

Notions abordées

- Révisions sur la notion d'arbre, notions d'arbre couvrant et de forêt couvrante
- Exécution de l'algorithme de Kruskal à la main
- Utilisation de la décomposition en CFC pour montrer que 2-SAT $\in P$

Exercice 1 : Résoudre 2-SAT en temps polynomial avec des graphes

Q. 1 Rappeler la définition du problème 2-SAT.

Pour un littéral l on note l^c le littéral opposé, autrement dit si l est un littéral de la forme x où x est une variable, alors $l^c = \neg x$, et si l est de la forme $\neg x$, alors $l^c = x$.

Q. 2 Si ρ est un environnement propositionnel qui satisfait une 2 clause $l_1 \vee l_2$, que peut-on dire de $[\![l_1]\!]^\rho$ si $[\![l_2^c]\!]^\rho = \mathsf{V}$? Que peut-on dire de $[\![l_2]\!]^\rho$ si $[\![l_1^c]\!]^\rho = \mathsf{V}$?

Q. 3 Étant donné une formule H donnée comme conjonction de m 2-clauses sur l'ensemble de variables $\mathcal{Q}$, donner un graphe orienté G_H sur l'ensemble de sommets $S = \mathcal{Q} \sqcup \neg\mathcal{Q}$ qui permet de représenter toutes les implications obtenues d'après la question précédente.
Dessiner le graphe proposé pour la formule $H = (x \vee \neg y) \wedge (\neg y \vee z) \wedge (y \vee \neg z) \wedge (y \vee z)$.
Indication : on pourra travailler d'abord sur la formule H puis généraliser.

Q. 4 Démontrer le lemme suivant.

Si $u \xrightarrow{*}_{G_H} v$ et si ρ satisfait H, alors $[\![u]\!]^\rho = \mathsf{V}$ implique $[\![v]\!]^\rho = \mathsf{V}$.

Q. 5 En déduire que si H est satisfiable, alors G_H vérifie $\forall x \in \mathcal{Q},\ x \not\rightsquigarrow_{G_H} \neg x$.

Q. 6 Montrer que la condition nécessaire précédente est en fait suffisante, c'est-à-dire que si G_H vérifie $\forall x \in \mathcal{Q},\ x \not\rightsquigarrow_{G_H} \neg x$ alors H est satisfiable. On attend une preuve constructive et même un algorithme qui calcule un environnement propositionnel à partir du graphe.
Indication : on pourra utiliser les algorithmes polynomiaux sur les graphes vus en cours.

Q. 7 Conclure quant à la difficulté du problème 2-SAT.

Exercice 2 : Arbres et forêts

Dans cet exercice on s'intéresse uniquement à des graphes non orientés (sans boucle). Lorsque $G = (S, A)$ est un tel graphe, on appelle sous-graphe (resp. sur-graphe) de G, un graphe $G' = (S, A')$ avec $A' \subseteq A$ (resp. $A \subseteq A'$). Ainsi les graphes sur un même ensemble de sommet S sont ordonnés♣ selon l'inclusion de leur ensemble d'arêtes.

Q. 1 Que dire du nombre de chaînes élémentaires reliant deux sommets distincts dans un graphe connexe ? Et dans un graphe acyclique ? Et dans un arbre ?

♣. cette relation d'ordre n'est pas totale

Q. 2 Soit $G = (S, A)$ un arbre Montrer que pour toute arêter $a = \{u, v\} \in A$ le graphe $G' = (S, A')$ où $A' = A \setminus \{a\}$ admet exactement deux composantes connexes, celle de u et celle de v.

Q. 3 Montrer que si $G = (S, A)$ est un graphe connexe et acyclique, alors $|A| = |S| - 1$. *On pourra démontrer le résultat par récurrence forte sur la taille du graphe en utilisant la* ***Q. 2***.

Q. 4 Montrer que si $G = (S, A)$ est un graphe connexe, alors il admet un sous-graphe connexe acyclique. *L'idée est de montrer qu'on peut casser les cycles sans perdre la connexité.*

Q. 5 Montrer que si $G = (S, A)$ est un graphe acyclique, alors il admet un sur-graphe acyclique connexe. *L'idée est de montrer qu'on peut relier les composantes connexes sans ajouter de cycle.*

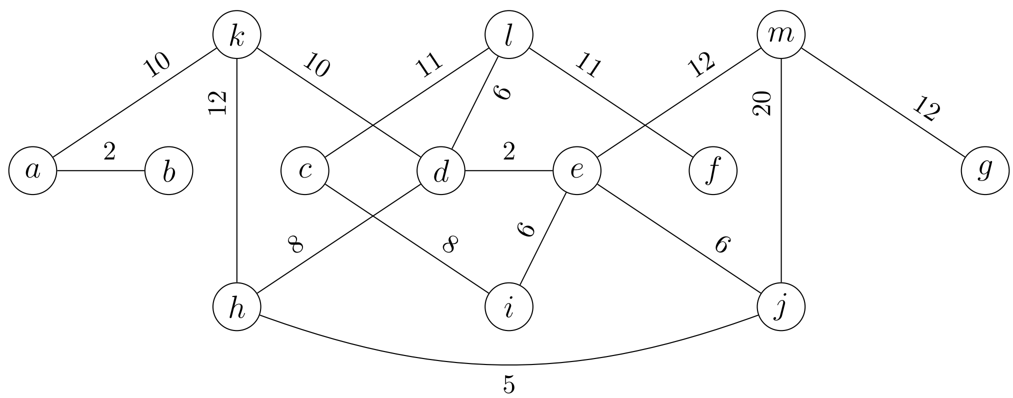
Q. 6 À l'aide des résultats précédemment établis, montrer que les 5 propositions ci-dessous sont équivalentes, pour $G = (S, A)$ un graphe non orienté.

- a. G est connexe et acyclique
- b. G est connexe et $|A| = |S| - 1$
- c. G est acyclique et $|A| = |S| - 1$
- d. G est minimal parmi les graphes connexes sur S
- e. G est maximal parmi les graphes acycliques sur S

Q. 7 On suppose que $A' \subseteq A$ se décompose k arbres qui, à eux tous, couvrent tous les sommets de G, *i.e.* $A = \sqcup_{i \in [\![1,k]\!]} A_i$ et $S = \sqcup_{i \in [\![1,k]\!]} S_i$ tel que $\forall i \in [\![1, k]\!]$, (S_i, A_i) est un arbre. Peut-on dire que (S, A') est une forêt couvrante de G ? Si oui le démontrer, sinon donner un contre-exemple.

Q. 8 Montrer que si (S, A') est une forêt couvrante de G, alors $|A'| = |S| - K$ où K est le nombre de composantes connexes de G.

Q. 9 Calculer une forêt couvrante de poids minimal du graphe ci-dessous à l'aide de l'algorithme de Kruskal.



Q. 10 Même question pour le graphe ci-dessous.