Feuille d'exercices n°7 - Arbres de preuves en logique propositionelle

Notions abordées

- déduction naturelle classique
- déduction naturelle intuitioniste
- correction de règle d'inférence
- dérivation de règle d'inférence

Exercice 1 : Premiers arbres de preuves

Donner une preuve utilisant les règles de la déduction naturelle intuitioniste pour chacun des séquents suivants.

Q.1 $\vdash p \to p$

Q.2 $p, \neg p \vdash \bot$

Q.3 $p, q \vdash p \wedge q$

Q.4 $p \wedge q \vdash q \wedge p$

Q.5 $p \vee q \vdash q \vee p$

Q.6 $\vdash \neg(p \wedge \neg p)$

Exercice 2 : Divers arbres de preuves

Donner une preuve utilisant les règles de la déduction naturelle intuitioniste pour chacun des séquents suivants.

Q.1 $p \vee (p \wedge q) \vdash p$

Q.2 $p \wedge q, r \wedge s \vdash p \wedge s$

Q.3 $p, q \wedge r \vdash p \wedge q$

Q.4 $p \vdash \neg\neg p$

Q.5 $\neg\neg\neg p \vdash \neg p$

Exercice 3 : Lois de de Morgan

Donner une preuve utilisant les règles de la déduction naturelle intuitioniste (ou classique si besoin) pour chacun des séquents suivants.

Q.1 $\neg(p \vee q) \vdash \neg p \wedge \neg q$

Q.2 $\neg p \wedge \neg q \vdash \neg(p \vee q)$

Q.3 $\neg(p \wedge q) \vdash \neg p \vee \neg q$

Q.4 $\neg p \vee \neg q \vdash \neg(p \wedge q)$

Exercice 4 : Distributivités entre $\vee$ et $\wedge$

Donner une preuve utilisant les règles de la déduction naturelle pour chacun des séquents suivants.

Q.1 $p \wedge (q \vee r) \vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

Q.2 $(p \wedge q) \vee (p \wedge r) \vdash p \wedge (q \vee r)$

Q.3 $p \vee (q \wedge r) \vdash (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

Q.4 $(p \vee q) \wedge (p \vee r) \vdash p \vee (q \wedge r)$

Exercice 5 : Implications

Donner une preuve utilisant les règles de la déduction naturelle pour chacun des séquents suivants.

Q.1 $q \vdash p \to q$

Q.2 $p \wedge q \vdash p \to q$

Q.3 $p \to q \vdash p \to (p \wedge q)$

Q.4 $p \to q \vdash \neg q \to \neg p$

Q.5 $p \to r \vdash (p \wedge q) \to r$

Q.6 $\vdash p \to (q \to p)$

Q.7 $p \vdash (p \to q) \to q$

Exercice 6 : Implications (partie 1 : simplifications)

Donner une preuve utilisant les règles de la déduction naturelle pour chacun des séquents suivants.

Q.1 $p \to \neg p \vdash \neg p$

Q.2 $p \to q, \neg q \vdash \neg p$

Q.3 $p \to q, p \vee q \vdash q$

Q.4 $p \to q, p \to \neg q \vdash \neg p$

Q.5 $p \to (q \vee r), \neg q, \neg r \vdash \neg p$

Q.6 $p \to (q \to r), p, \neg r \vdash \neg q$

Q.7 $p \to (q \to r), p \to q, p \vdash r$

Q.8 $p \to (q \to r), q \to p \vdash q \to r$

Q.9 $p \to (p \to q), p \vdash q$

Exercice 7 : Implications (partie 2 : transformations)

Donner une preuve utilisant les règles de la déduction naturelle pour chacun des séquents suivants.

Q.1 $p \to q \vdash \neg q \to \neg p$

Q.2 $p \to q \vdash (p \land r) \to (q \land r)$

Q.3 $(p \land r) \to (q \land r), r \vdash p \to q$

Q.4 $p \to q \vdash (p \lor r) \to (q \lor r)$

Q.5 $(p \land q) \to r, \neg r \vdash p \to \neg q$

Q.6 $p \to q, r \to s \vdash (p \land r) \to (q \land s)$

Q.7 $p \to q, r \to s \vdash (p \lor r) \to (q \lor s)$

Q.8 $p \to (q \lor r), q \to s, r \to s \vdash p \to s$

Q.9 $p \to (q \to r) \vdash q \to (p \to r)$

Exercice 8 : Distributivités d'implications

Donner une preuve utilisant les règles de la déduction naturelle pour chacun des séquents suivants.

Q.1 $p \to (q \land r) \vdash (p \to q) \land (p \to r)$ et réciproquement.

Q.2 $(p \lor q) \to r \vdash (p \to r) \land (q \to r)$ et réciproquement.

Q.3 $(p \to q) \lor (p \to r) \vdash p \to (q \lor r)$ et réciproquement.

Q.4 $q \to r \vdash (p \to q) \to (p \to r)$

Exercice 9 : Trois autres équivalences classiques

Donner une preuve utilisant les règles de la déduction naturelle pour chacun des séquents suivants.

Q.1 $(p \land q) \to r \vdash p \to (q \to r)$ et réciproquement.

Q.2 $(p \land q) \to r \vdash (p \to r) \lor (q \to r)$ et réciproquement.

Q.3 $p \to (q \to r) \vdash (p \to r) \lor (q \to r)$ et réciproquement.

Exercice 10 : Utilisation de l'absurdité intuitionniste

Donner une preuve utilisant les règles de la déduction naturelle intuitioniste, et en particulier la règle $(\perp_e)$, pour chacun des séquents suivants.

Q.1 $\neg\neg p, p \lor \neg p \vdash p$

Q.2 $\neg p \vdash p \to q$

Q.3 $p \lor q, \neg q \vdash p$

Q.4 $(p \lor r) \to (q \lor r), \neg r \vdash p \to q$

Q.5 $\neg(p \to q) \vdash q \to p$

Exercice 11 : Dérivations et absurdité intuitionniste

On dit qu'on dérive une règle R lorsqu'on donne un arbre de preuve qui aboutit au séquent conclusion de la règle R et dont les feuilles sont des règles sans prémisses ou des séquents prémisses de la règle R (et ce sans utiliser la règle R évidemment). Autrement dit on donne un morceau d'arbre qui pourrait remplacer les occurences de la règles R dans un arbre de preuve.

Q. 1 Dériver $(\bot_e)$ en utilisant $(\neg\neg_e)$.

Q. 2 Dériver $(\bot_e)$ en utilisant (abs).

On se donne la nouvelle règle suivante de création d'implication.

$$\frac{\Gamma \vdash \neg p}{\Gamma \vdash p \to q} \to_c$$

Q. 3 Montrer que cette règle d'inférence est correcte.

Q. 4 Dériver $(\bot_e)$ en utilisant cette nouvelle règle $(\to_c)$.

Exercice 12 : Une règle équivalente au tiers-exclus

On s'intéresse dans cet exercice à une nouvelle règle d'inférence définie ci-dessous.

$$\frac{\Gamma \vdash \neg G \to \bot}{\Gamma \vdash G} \text{ R}$$

On appelle **déduction naturelle alternative** le système de preuve contenant les règles de la logique intuitionniste et la règle R.

Q. 1 Montrer que la règle R dérive de la déduction naturelle classique. Autrement dit donner un arbre de preuve aboutissant au séquent $\Gamma \vdash G$ en s'autorisant des feuilles étiquetées par le séquent $\Gamma \vdash \neg G \to \bot$

Q. 2 Donner une preuve **en déduction naturelle alternative**, du séquent $\emptyset \vdash A \vee \neg A$.

Exercice 13 : Implication et disjonctions en logique classique

Donner une preuve utilisant les règles de la déduction naturelle classique pour chacun des séquents suivants.

Q.1 $\neg p \to p \vdash p$

Q.2 $p \to q \vdash \neg p \vee q$

Q.3 $\neg p \vee q \vdash p \to q$

Q.4 $\neg q \to \neg p \vdash p \to q$

Q.5 $q \to r, \neg q \to \neg p \vdash p \to r$

Q.6 $p \vee q, \neg q \vee r \vdash p \vee r$

Q.7 $\neg(p \wedge q) \vdash \neg p \vee \neg q$

Q.8 $(p \wedge q) \to r \vdash (p \to r) \vee (q \to r)$

Q.9 $p \to (q \to r) \vdash (p \to r) \vee (q \to r)$

Q.10 $p \to (q \vee r) \vdash (p \to q) \vee (p \to r)$