Feuille d'exercices n°08 - Preuves en logique du premier ordre

Notions abordées

- syntaxe de la logique du premier ordre
- variables libres, liées, clotûre universelle, existentielle
- substitution dans des formules de la logique du premier ordre
- déduction naturelle en logique du premier ordre
- règles d'introduction et d'élimination des quantificateurs

Exercice 1 : Formalisation

Q. 1 Formaliser les énoncés suivants par des formules de la logique du premier ordre sans symbole de fonction et utilisant les prédicats suivants.

- étudiant d'arité 1
- raison d'arité 1
- humain d'arité 1
- éléphant d'arité 1
- animal d'arité 1
- chien d'arité 1
- logicien d'arité 1
- gentil_avec d'arité 2
- cherche d'arité 2
- aime d'arité 2

$a)$ *Tous les étudiants sont doués de raison.*
$b)$ *Seuls les êtres humains sont doués de raison.*
$c)$ *Aucun éléphant n'est doué de raison.*
$d)$ *Tous les animaux, sauf les chiens, sont gentils avec les logiciens.*
$e)$ *Chaque individu aime quelqu'un et personne n'aime tout le monde.*

Exercice 2 : Variables libres et liées, clôture universelle

À partir de l'ensemble de symboles de variables $\mathcal{V} = \{w, x, y, z\}$, on définit les formules suivantes.

$$
\begin{array}{ll}
(F_1) & p(f(x,y)) \lor \forall z\, r(z,z) \\
(F_2) & \forall x\, \exists y\, (r(x,y) \to \forall z\, q(x,y,z)) \\
(F_3) & \forall x\, \Big(q(x,y,z) \land \forall z\, (q(z,y,x) \to r(z,z))\Big) \\
(F_4) & \forall y\, (p(f(g(x),y)) \land \forall x\, (r(g(z),x) \to \exists z\, p(f(z,w)))) \\
(F_5) & \forall x\ (q(x,y,z) \to \exists y\ (r(f(x,y),z) \lor \forall z\ (r(f(x,z),f(y,a))))) \\
(F_6) & \forall x\ ((\exists z\, q(x,y,z)) \lor (\neg \forall y\ (r(f(x,y),z) \land r(f(x,z),f(y,a)))))
\end{array}
$$

Q. 1 Dessiner les arbres de syntaxe de ces formules.

Q. 2 Pour chacune de ces formules :

$a)$ déterminer l'ensemble des symboles de prédicat et leurs arités respectives ;
$b)$ déterminer l'ensemble des symboles de constante ;

   c) déterminer l'ensemble des autres symboles de fonction et leurs arités respectives.

Q. 3 Pour chacune de ces formules :

   a) calculer l'ensemble des variables libres ;
   b) calculer l'ensemble des variables liées ;
   c) indiquer pour chaque occurence de variable libre le quantificateur dont elle dépend à l'aide d'une flèche de couleur sur l'arbre de syntaxe.

Q. 4 a) Parmi ces formules, lesquelles sont des formules closes ?
   b) Transformer si besoin les formules de sorte qu'aucune variable ne soit à la fois libre et liée dans la même formule.
   c) Donner une clôture universelle ♣de chacune des formules.

Exercice 3 : Substitution et α-renommage

Q. 1 Soient u, v, w, x, y et z des symboles de variables, f, g et h des symboles de fonctions d'arités respectives 2, 3 et 1, et enfin p et q des symboles de prédicats d'arité 2.

Calculer, lorsque cela est possible, $G[x \mapsto f(y,z)]$ les formules G suivantes. Lorsque cela n'est pas possible, on appliquera un α-renommage avant d'appliquer la substitution.

   a) $G = \forall x\ \exists z\ p(f(y,z),x)$;
   b) $G = \exists z\ p(f(y,z),x)$;
   c) $G = \forall y\ \exists z\ p(g(y,z,x),x)$;
   d) $G = (\forall w\ p(h(w),x)) \to (\forall x\ \forall z\ q(x, f(z,z)))$.

Exercice 4 : Quelques arbres de preuves

On suppose que p et q sont des symboles de prédicat unaires et r un symbole de prédicat binaire. Donner une preuve utilisant les règles de la déduction naturelle intuitioniste pour chacun des séquents suivants.

Q.1 $\exists t\, \forall x\, r(t,x) \vdash \forall y\, \exists z\, r(z,y)$

Q.2 $\forall x, p(x) \vdash \neg(\exists x, (\neg p(x)))$

Q.3 $\exists x, (\neg p(x)) \vdash \neg(\forall x, p(x))$

Q.4 $\neg(\exists x, p(x)) \vdash \forall x, (\neg p(x))$

Q.5 $\exists x\, p(x)\, ;\, \forall x\, \forall y\, \big(p(x) \to q(y)\big) \vdash \forall y\, q(y)$

Q.6 $\forall x\ p(x) \vdash \exists x\, p(x)$

♣. On appelle clôture universelle d'une formule φ une formule obtenue en ajoutant devant φ un quantificateur $\forall x$ pour chaque variable x libre dans φ. L'ordre n'est pas précisé, c'est pourquoi on ne dit pas *la* clôture universelle.

Exercice 5 : Distributivité des quantificateurs

On suppose que p et q sont des symboles de prédicat unaires et r un symbole de prédicat d'arité 0.
Donner une preuve utilisant les règles de la déduction naturelle intuitioniste pour chacun des séquents suivants.

Q.1 $\forall x\,(p(x) \land q(x)) \vdash (\forall x\, p(x)) \land (\forall x\, q(x))$ et réciproquement.

Q.2 $\exists x\,(p(x) \land q(x)) \vdash \exists x\, p(x) \land \exists x\, q(x)$

Q.3 $(\forall x\, p(x)) \lor (\forall x\, q(x)) \vdash \forall x\,(p(x) \lor q(x))$

Q.4 $\exists x\,(p(x) \lor q(x)) \vdash (\exists x\, p(x)) \lor (\exists x\, q(x))$ et réciproquement.

Q.5 $\forall x\,(p(x) \to q(x)) \vdash (\forall x\, p(x)) \to (\forall x\, q(x))$

Q.6 $\exists x\,(p(x) \to q(x)) \vdash (\forall x\, p(x)) \to (\exists x\, q(x))$

Q.7 $\exists x\,(p(x) \land q(x));\ \forall x\,(q(x) \to r) \vdash \exists x\,(p(x) \land r)$

Exercice 6 : Semi-distributivité des quantificateurs

On suppose que p est un symbole de prédicat unaire et q un symbole de prédicat d'arité 0.
Donner une preuve utilisant les règles de la déduction naturelle intuitioniste pour chacun des séquents suivants.

Q.1 $\forall x\,(p(x) \land q) \vdash (\forall x\, p(x)) \land q$ et réciproquement.

Q.2 $\exists x\,(p(x) \land q) \vdash (\exists x\, p(x)) \land q$ et réciproquement.

Q.3 $(\forall x\, p(x)) \lor q \vdash \forall x\,(p(x) \lor q)$.

Q.4 $\exists x\,(p(x) \lor q) \vdash (\exists x\, p(x)) \lor q$ et réciproquement.

Q.5 $\forall x\,(q \to p(x)) \vdash q \to (\forall x\, p(x))$ et réciproquement.

Q.6 $\forall x\,(p(x) \to q) \vdash (\exists x\, p(x)) \to q$ et réciproquement.

Q.7 $\exists x\,(p(x) \to q) \vdash (\forall x\, p(x)) \to q$ et réciproquement.

Q.8 $\exists x\,(q \to p(x)) \vdash q \to (\exists x\, p(x))$.

Exercice 7 : Logique classique du premier ordre

On suppose que p est un symbole de prédicat unaire et q un symbole de prédicat d'arité 0.
Donner une preuve utilisant les règles de la déduction classique pour chacun des séquents suivants.
En particulier, dans cet exercice l'usage des règles te, abs, $\neg\neg_{é}$ est possible.

Q.1 $\neg\Big(\exists x\,(\neg p(x))\Big) \vdash \forall x\, p(x)$

Q.2 $\neg(\forall x\, p(x)) \vdash \exists x\,(\neg p(x))$

Q.3 $\forall x\,(\neg p(x)) \vdash \neg(\exists x\, p(x))$

Q.4 $\neg\Big(\forall x, (\neg p(x))\Big) \vdash \exists x, p(x)$

Q.5 $\exists x\, p(x) \vdash \neg\Big(\forall x\,(\neg p(x))\Big)$

Q.6 $\forall x\,(p(x) \lor q) \vdash (\forall x\, p(x)) \lor q$

Q.7 $q \to (\exists x\, p(x)) \vdash \exists x\,(q \to p(x))$

Q.8 $(\forall x\, p(x)) \to (\exists x\, q) \vdash \exists x\,(p(x) \to q)$

Q.9 $\vdash \exists x\,\Big(p(x) \to \forall y\, p(y)\Big)$