
ELECTROCINETIQUE : SYNTHÈSE DU COURS DE MP2I

I- ÉTUDE TEMPORELLE DES CIRCUITS**1. Relations nécessaires à l'établissement des équations permettant d'étudier le circuit**Lois de Kirchhoff :

- Loi des nœuds : $\sum_{k=1}^n \varepsilon_k i_k = 0$ $\left\{ \begin{array}{l} - \text{ avec } \varepsilon_k = +1 \text{ pour } i_k \text{ orienté vers le nœud} \\ - \text{ avec } \varepsilon_k = -1 \text{ pour } i_k \text{ orienté à partir du nœud} \end{array} \right.$
- Loi des mailles : $\sum_{k=1}^n \varepsilon_k u_k = 0$ $\left\{ \begin{array}{l} - \text{ avec } \varepsilon_k = +1 \text{ pour } u_k \text{ orienté dans le sens de parcours de la maille} \\ - \text{ avec } \varepsilon_k = -1 \text{ pour } u_k \text{ orienté en sens inverse} \end{array} \right.$

Relations caractéristiques des dipôles passifs couramment rencontrés :

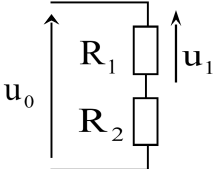
Dipôle	Symbole	Relation entre i et u
Condensateur idéal		$i = C \frac{du}{dt} = -C \frac{du'}{dt}$ C capacité (Farad)
Bobine idéale		$u = L \frac{di}{dt} \text{ ou } u' = -L \frac{di}{dt}$ L inductance (Henry)
Résistance		$u = Ri \text{ ou } u' = -Ri$ R résistance

2. Simplification du circuit

➤ Lois d'associations des dipôles

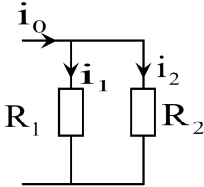
Dipôles	Association série (n dipôles parcourus par un même courant)	Association parallèle (n dipôles ayant la même tension à leurs bornes)
Condensateurs	$\frac{1}{C_{eq}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{C_k}$	$C_{eq} = \sum_{k=1}^n C_k$
Bobines	$L_{eq} = \sum_{k=1}^n L_k$	$\frac{1}{L_{eq}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{L_k}$
Résistances	$R_{eq} = \sum_{k=1}^n R_k$	$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{R_k}$
Sources idéales de tension	$E_{eq} = \sum_{k=1}^n E_k$ Somme algébrique	
Sources idéales de courant		$I_{eq} = \sum_{k=1}^n I_k$ Somme algébrique

➤ Diviseur de tension (non applicable avec des bobines et/ou condensateurs)

$$u_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} u_0$$


Les deux **résistances** sont en série (parcourues par le même courant)

➤ Diviseur de courant (non applicable avec des bobines et/ou condensateurs)

$$i_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} i_0$$


Les deux **résistances** sont en parallèle (même tension à leurs bornes)

On aboutit alors aux équations différentielles permettant de déterminer les expressions des différentes tensions (ou intensités) dans le circuit en fonction du temps

II-ETUDE FRÉQUENTIELLE DES CIRCUITS LINÉAIRES

On étudie la réponse des circuits à une excitation sinusoïdale en régime établi (une fois le régime transitoire achevé) en fonction de la fréquence de l'excitation. **Ce régime établi sinusoïdal est appelé régime sinusoïdal forcé.**

En régime sinusoïdal forcé, la tension (ou l'intensité) étudiée est de la forme :

$u(t) = U \cos(\omega t + \varphi)$ avec ω la pulsation de l'excitation.

Les grandeurs U et φ ne peuvent pas être déterminées à l'aide des conditions initiales puisqu'à l'instant initial la tension n'était pas de cette forme (terme exponentiellement décroissant en plus).

L'étude fréquentielle consiste à déterminer les grandeurs U et φ caractérisant la tension $u(t) = U \cos(\omega t + \varphi)$:

- U : **amplitude la tension** ;
- φ : **phase à l'origine de la tension**

1. Notation complexe

On peut écrire : $\underline{u}(t) = U e^{j\varphi} e^{j(\omega t)} = \underline{U} e^{j(\omega t)}$ avec $\underline{U} = U e^{j\varphi}$ amplitude complexe et $u(t) = \text{Re}(\underline{u})$.

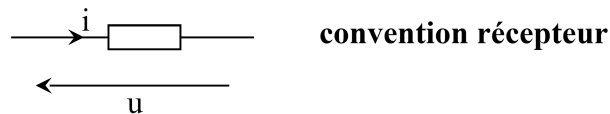
L'amplitude de la tension réelle est le module de l'amplitude complexe ;

La phase à l'origine de la tension réelle est l'argument de l'amplitude complexe.

$$\text{Soit } \underline{u}(t) = \underline{U} e^{j(\omega t)} \Rightarrow \frac{d\underline{u}(t)}{dt} = \underline{U} j\omega e^{j(\omega t)} = j\omega \underline{u}(t) = \omega \underline{u}(t) e^{j\frac{\pi}{2}}$$

Dériver en notation complexe revient donc à multiplier par $j\omega$.

2. Impédance d'un dipôle linéaire passif



Soit $u(t) = U \cos(\omega t + \varphi_u)$ et $i(t) = I \cos(\omega t + \varphi_i)$

$\underline{u}(t) = \underline{Z}(j\omega) \underline{i}(t)$: $\underline{Z}(\omega)$ impédance complexe du dipôle en Ohm.

$$\text{On a donc : } \underline{Z}(j\omega) = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{U}{I} e^{j(\varphi_u - \varphi_i)}$$

Et donc : $|\underline{Z}(j\omega)| = Z(\omega) = \frac{U}{I}$ est le rapport des amplitudes de la tension et de l'intensité et $\arg(\underline{Z})$ représente le déphasage de $u(t)$ par rapport à $i(t)$.

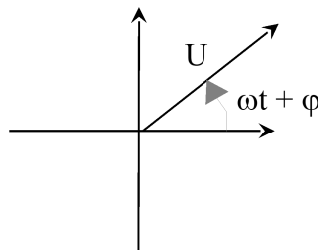
<i>Dipôles</i>	<i>Impédance</i>	<i>Déphasage de la tension par rapport à l'intensité</i>
<i>Condensateurs</i>	$\underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega}$	$-\frac{\pi}{2}$
<i>Bobines</i>	$\underline{Z}_L = jL\omega$	$+\frac{\pi}{2}$
<i>Résistances</i>	R	0

Remarque : la relation caractéristique des conducteurs ohmiques : $u = Ri$ est de la même forme que la relation caractérisant les dipôles passifs linéaires en régime sinusoïdal forcé : $\underline{u} = \underline{Z}\underline{i}$.

Conséquence : **les dipôles passifs linéaires en régime sinusoïdal forcé obéissent aux mêmes lois que les résistances en régime quelconque que** (lois d'associations en série et en parallèle, diviseurs de tension et de courant).

3. Représentation de Fresnel (MPI*)

La tension $u(t) = U\cos(\omega t + \varphi)$ peut être représentée dans le plan complexe.



L'opération de dérivation revient à tracer un vecteur directement perpendiculaire à $u(t)$ et dont la norme est multipliée par ω :

$$\frac{du(t)}{dt} = -\omega U \sin(\omega t + \varphi) = \omega U \cos\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

L'opération d'intégration revient à tracer un vecteur perpendiculaire à $u(t)$ en tournant dans le sens horaire et dont la norme est divisée par ω :

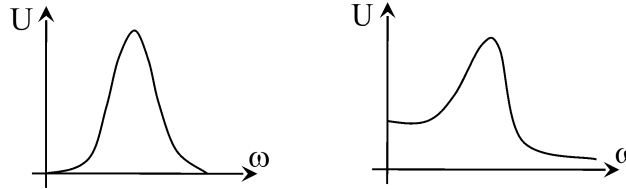
$$\int u(t) dt = \frac{U}{\omega} \sin(\omega t + \varphi) = \frac{U}{\omega} \cos\left(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}\right)$$

Application directe des parties II-1-2-3 menée sur une feuille à part : circuit RC

4. Résonance

On dit qu'il y a résonance lorsque **l'amplitude des oscillations passe par un maximum** lors d'un balayage en fréquence.

Par exemple :



III- ETUDE ÉNERGÉTIQUE DES CIRCUITS

1. Rappel sur la puissance reçue par un dipôle

C'est l'énergie reçue (algébriquement) par le dipôle par unité de temps.

$p(t) = \frac{dE}{dt}$ avec dE petite variation d'énergie du dipôle pendant le petit intervalle de temps dt.

$p(t) = u(t) \cdot i(t)$ avec u(t) et i(t) en convention récepteur

2. Energie reçue par un dipôle

L'énergie reçue par le dipôle entre les instants $t = 0$ et t correspond à sa variation d'énergie entre ces deux instants c'est-à-dire à la somme des petites variations d'énergie entre $t = 0$ et t :

$$\Delta E = E(t) - E(0) = \int_{t=0}^t dE = \int_{t=0}^t p(t) dt$$

3. Exemples

- Condensateur :

$$E(t) - E(0) = \int_{t=0}^t u_C(t) i_C(t) dt = \int_{t=0}^t u_C(t) C \frac{du_C}{dt} dt = \frac{1}{2} C u_C^2(t) - \frac{1}{2} C u_C^2(0)$$

Si le condensateur est initialement déchargé ($u_C(0) = 0$) : $E(t) = \frac{1}{2} C u_C^2(t)$

- Bobine :

$$E(t) - E(0) = \int_{t=0}^t u_L(t) i_L(t) dt = \int_{t=0}^t L \frac{di_L}{dt} i_L(t) dt = \frac{1}{2} L i_L^2(t) - \frac{1}{2} L i_L^2(0)$$

Si le courant dans la bobine est initialement nul ($i_L(0) = 0$) : $E(t) = \frac{1}{2} L i_L^2(t)$