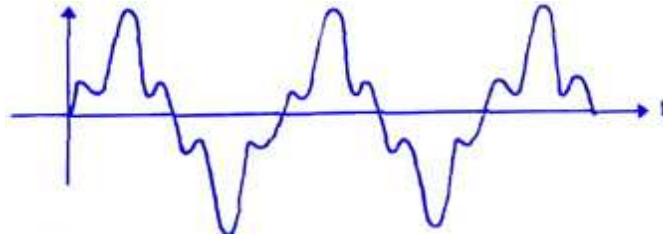


FILTRAGE LINEAIRE D'UN SIGNAL PERIODIQUE

I- ANALYSE DE FOURIER D'UN SIGNAL PERIODIQUE

On s'intéresse dans ce chapitre à des signaux électriques dont les variations se répètent périodiquement dans le temps.



La durée d'un motif est appelée période notée T .

Le nombre de répétitions d'un motif par seconde est appelé fréquence, notée f avec $f = \frac{1}{T}$.

Ce signal est également caractérisé par sa valeur efficace et par sa valeur moyenne, grandeurs que l'on peut mesurer au multimètre.

Pour rappel, la valeur efficace V_{eff} d'un signal $v(t)$ correspond à la racine de la valeur moyenne du signal au carré (Root Mean Square ou RMS) : $V_{\text{eff}}^2 = \langle v(t)^2 \rangle$.

I-1- Décomposition d'un signal périodique en une somme de signaux sinusoïdaux (série de Fourier)

Tout signal périodique peut s'écrire sous la forme d'une somme de termes sinusoïdaux.

Par exemple, une tension $v(t)$ de période $T = \frac{1}{f}$ peut s'écrire sous la forme suivante :

$$v(t) = \sum_{k=0}^{\infty} V_k \cos(k2\pi ft + \varphi_k)$$

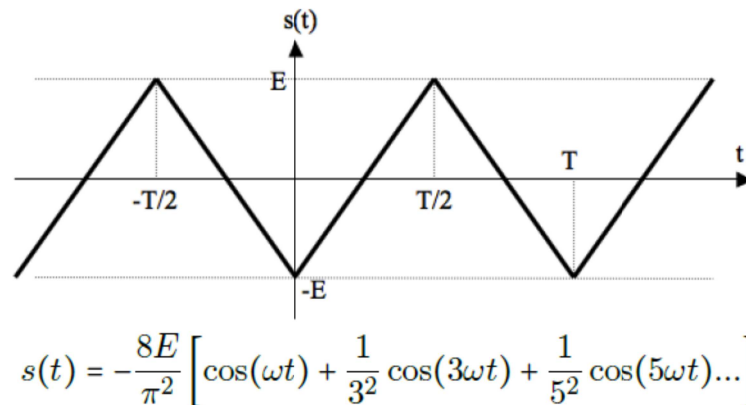
Avec :

- $V_0 \cos \varphi_0$: composante continue du signal ($k = 0$: correspond à un signal de fréquence nulle constant au cours du temps) ; elle correspond à la valeur moyenne du signal ;
- En effet : $\langle v(t) \rangle = \langle V_0 \cos \varphi_0 \rangle + \sum_{k=1}^{\infty} \langle V_k \cos(k2\pi ft + \varphi_k) \rangle = \langle V_0 \cos \varphi_0 \rangle = V_0 \cos \varphi_0$
- $V_1 \cos(2\pi ft + \varphi_1) = V_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$: composante de même période que le signal $v(t)$; on l'appelle composante fondamentale ; On note $\omega = 2\pi f$ la pulsation du signal sinusoïdal.
- les autres termes de la somme correspondent aux harmoniques de rang k ($k > 1$)

Remarques :

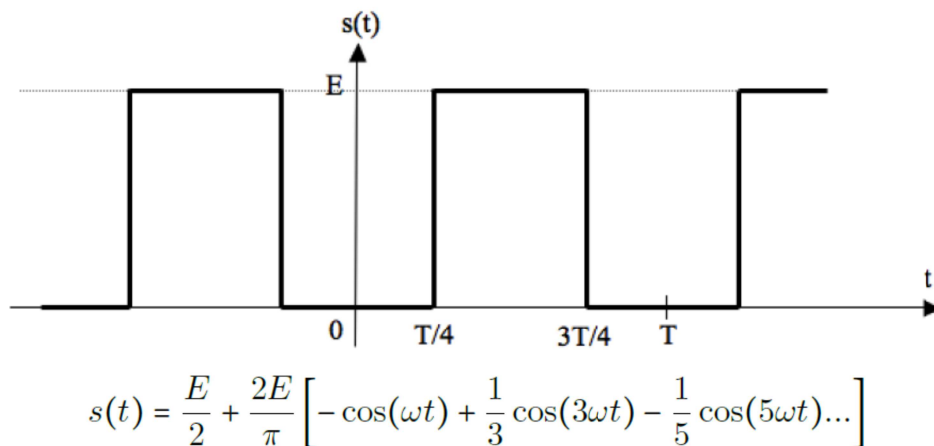
- Les coefficients V_k et φ_k sont calculables mais leurs expressions ne figurent pas au programme.
- Si le signal $v(t)$ est une fonction paire, la décomposition en série de Fourier (DSF) du signal sera une somme de cosinus et s'il est impaire une somme de sinus.

- Exemple d'un signal triangulaire



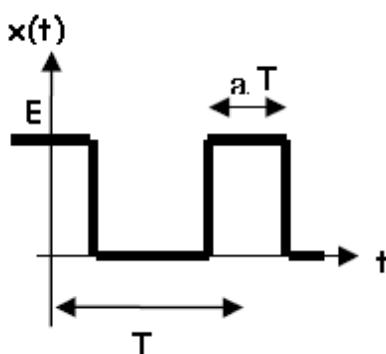
Ce signal pair n'est composé que d'une série de cosinus. On remarque par ailleurs qu'il ne comporte que des harmoniques de rang impair

- Exemple d'un signal créneau de rapport cyclique 1/2



Ce signal pair n'est composé que d'une série de cosinus et lui aussi ne comporte que des harmoniques de rang impair mais leur amplitude diminue moins vite avec le rang de l'harmonique que dans le signal triangulaire.

- Signal créneau de rapport cyclique a quelconque



$$x(t) = aE \left[1 + \frac{2 \sin(\pi a)}{\pi a} \cos(\omega t) + \dots + \frac{2 \sin(k\pi a)}{k\pi a} \cos(k\omega t) + \dots \right]$$

Il manque cette fois les harmoniques de fréquences $kf = \frac{p}{\tau}$ où $\tau = aT$ et p entier naturel.

I-2- Valeur efficace d'un signal périodique

On veut retrouver les valeurs efficaces des trois signaux suivants :

Exemple 1 : valeur efficace d'un signal continu : $v_0(t) = V_0 \cos \varphi_0$

On obtient $V_{\text{eff}} = V_0 \cos(\varphi_0)$

Exemple 2 : valeur efficace d'un signal sinusoïdal : $v_k(t) = V_k \cos(k2\pi ft + \varphi_k)$

On obtient $V_{\text{eff}} = \frac{V_k}{\sqrt{2}}$

Généralisation : valeur efficace d'un signal périodique : $v(t) = \sum_{k=0}^{\infty} V_k \cos(k2\pi ft + \varphi_k)$

La valeur efficace d'un signal périodique se calcule à partir de la relation :

$$V_{\text{eff}}^2 = V_0^2 \cos^2 \varphi_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{V_k^2}{2}$$

On retiendra que :

- la valeur efficace d'un signal sinusoïdal est égale à son amplitude divisée par $\sqrt{2}$
- la valeur efficace au carré d'un signal est égale à la somme des carrés des valeurs efficaces de chaque composante du signal.

I-3- Spectre de Fourier

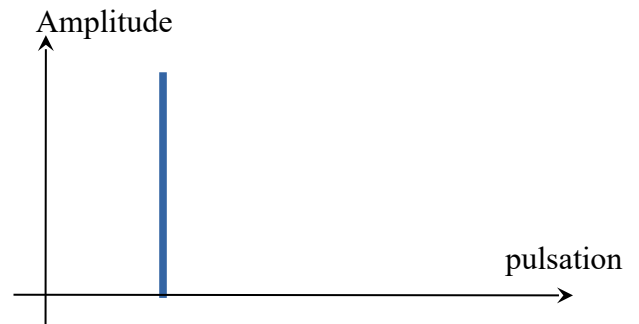
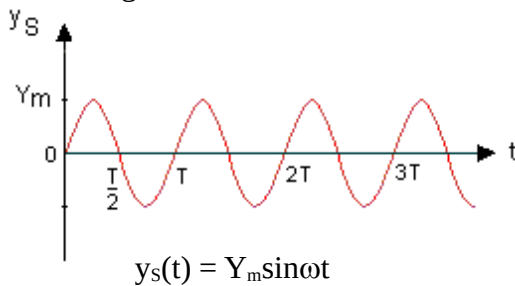
Le spectre de Fourier correspond à la représentation graphique des amplitudes et des phases à l'origine de chaque composante sinusoïdale composant le signal en fonction de sa fréquence. Il s'agit d'un **spectre de raies**.

Le spectre d'un signal périodique est composé de fréquences multiples de la fréquence fondamentale (avec éventuellement en plus une composante continue si la valeur moyenne du signal est non nulle).

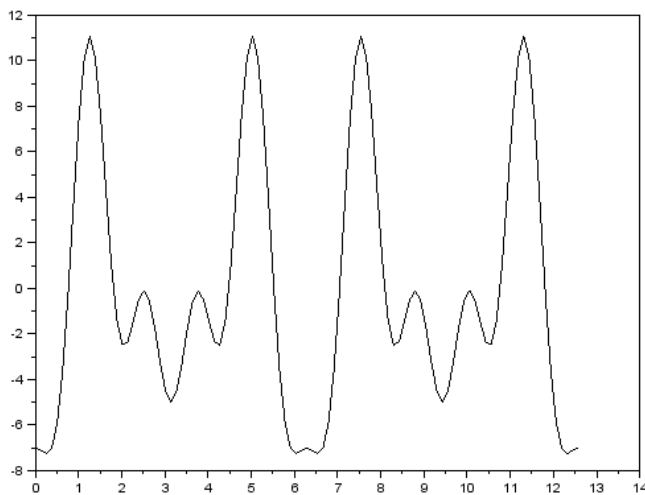
Remarque : Lorsqu'on trace un spectre on ne s'intéresse, en général, qu'à l'amplitude des différentes composantes et pas à leur phase à l'origine car c'est ce qui est important en terme de filtrage (mais ce n'est pas suffisant pour décrire complètement le signal).

Exemples de spectres en amplitude

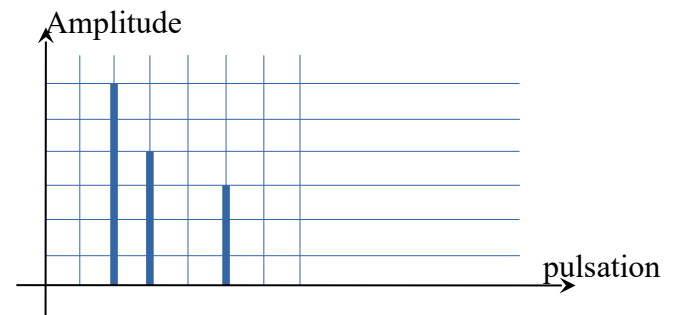
- Signal sinusoïdal



- Signal périodique quelconque



$$S(t) = 3S_0 \cos(5ft) + 6S_0 \sin(2ft + \pi/2) - 4S_0 \cos(3ft)$$



On remarque que toutes les harmoniques ne sont pas forcément présentes dans un signal périodique.

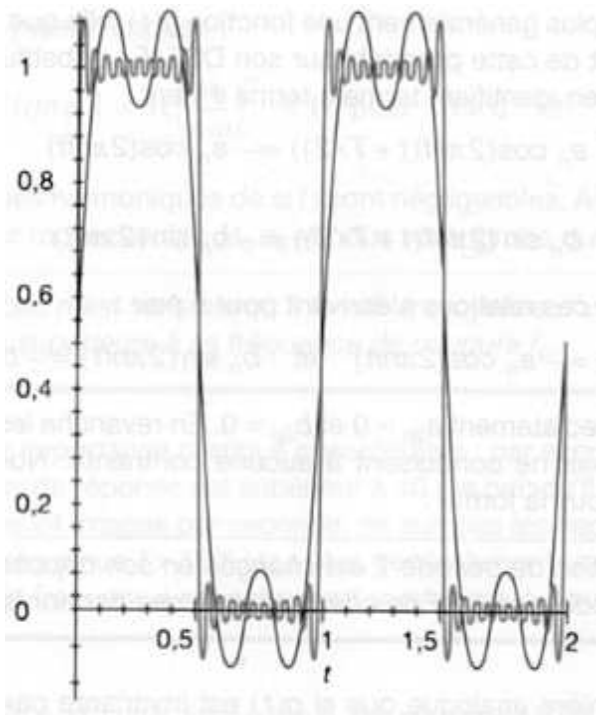
I-4- Reconstitution d'un signal à partir de sa DSF

Réciproquement, on peut recomposer un signal à partir des termes de la série de Fourier correspondante : c'est la synthèse de Fourier.

En toute rigueur, il faut bien sûr un nombre infini de termes pour reconstituer parfaitement le signal. Cependant, selon la précision désirée, on pourra se contenter seulement du fondamental et d'un certain nombre d'harmoniques. Ainsi, on pourra en quelque sorte synthétiser une fonction périodique donnée à partir de sa série de Fourier.

Exemple 1 : synthèse d'un signal créneau :

Animation : synthèse harmonique d'un créneau visualisable à l'adresse sur le site Wikipedia, article « Signal carré ».



A titre d'exemple, la figure ci-contre montre la synthèse d'un signal créneau à partir de sa composante continue, du fondamental et

- des harmoniques jusque $k=3$;
- des harmoniques jusque $k=21$.

On peut vérifier que le nombre d'oscillations par période correspond au rang du dernier harmonique composant le signal.

On constate par ailleurs que la synthèse s'améliore avec le nombre de termes pris en compte.

On peut également remarquer sur cet exemple que la synthèse des fronts montants et descendants, là où le signal varie très rapidement, nécessite des harmoniques de rang élevé.

Exemple 2 : Comparaison des DSF d'un signal créneau et d'un signal triangle (cf. I-1) :

Le poids des harmoniques de rang élevé est plus important dans le cas du créneau que du triangle. En effet, le signal créneau comporte des variations plus brutales que le signal triangulaire.

Généralisation :

Plus une fonction périodique varie brutalement, plus les harmoniques élevées jouent un rôle important dans sa décomposition en série de Fourier.

II- CARACTERISTIQUES D'UN FILTRE

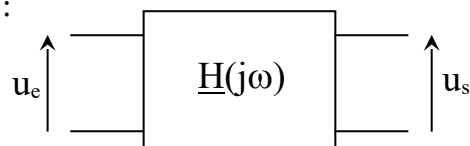
Un filtre est un circuit électrique réalisant une opération de traitement du signal : il atténue certaines composantes spectrales d'un signal et en laisse passer d'autres.

Les filtres passifs ne contiennent que des éléments passifs : R, L, C alors que les filtres actifs incluent dans leur structure des composants nécessitant une source d'énergie pour fonctionner (A.L.I. avec son alimentation par exemple).

On étudie des filtres linéaires : les grandeurs d'entrée et de sortie sont reliées par une équation différentielle linéaire à coefficients constants.

II-1- Fonction de transfert en tension

On considère le quadripôle suivant :



La fonction de transfert en tension d'un quadripôle est définie par le rapport des tensions complexes de sortie et d'entrée : $\underline{H}(j\omega) = \frac{u_s(j\omega)}{u_e(j\omega)}$

Si : $u_e(t) = U_e \cos \omega t$ et $u_s(t) = U_s \cos(\omega t + \varphi)$.

La fonction de transfert peut alors s'écrire sous la forme : $\underline{H}(j\omega) = \frac{U_s}{U_e} e^{j(\varphi_s - \varphi_e)}$

- Son module correspond donc au rapport des amplitudes des tensions de sortie et d'entrée ; il est appelé « gain » : $|\underline{H}(j\omega)| = H(\omega) = \frac{U_s}{U_e}$.

Dans le cas où le signal de sortie est amplifié par rapport au signal d'entrée : $H > 1$

Dans le cas où le signal de sortie est atténué par rapport au signal d'entrée : $H < 1$

Si le signal est éliminé : $H = 0$

- Son argument représente le déphasage de la tension de sortie par rapport à la tension d'entrée : $\arg(\underline{H}(j\omega)) = \varphi_s - \varphi_e$.

II-2- Diagramme de Bode

a- Echelle logarithmique

L'étude d'un filtre consiste à étudier la dépendance de sa fonction de transfert avec la fréquence (ou la pulsation) : $H(\omega)$ et $\arg \underline{H}(\omega)$.

Dans le cadre de l'approximation des régimes quasi-stationnaires, les fréquences peuvent varier de la fréquence nulle (continu) jusqu'au Mégahertz. Cette plage de fréquences étant très large, on utilise une échelle logarithmique pour les fréquences.

On appelle « décade » un intervalle de fréquences sur lequel la fréquence est multipliée par 10.

b- Diagramme de Bode

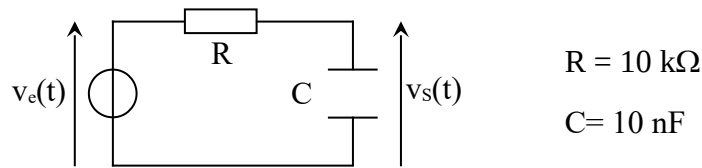
Afin d'obtenir des diagrammes asymptotiques linéaires, on n'étudie pas le gain en fonction de la fréquence mais le gain en décibel noté G_{dB} tel que $G_{dB} = 20 \log |\underline{H}|$

- Si le signal est amplifié : $G_{dB} > 0$;
- Si le signal est atténué : $G_{dB} < 0$;
- Si le signal est éliminé : G_{dB} tend vers $-\infty$;
- Si le signal est transmis sans atténuation : $G_{dB} = 0$.

Le diagramme de Bode du filtre est alors constitué par l'ensemble de deux graphiques :

- le gain en décibel en fonction de $\log \omega$ (ou $\log f$)
- le déphasage de la tension de sortie par rapport à la tension d'entrée en fonction de $\log \omega$ (ou $\log f$)

II-3 Un exemple de tracé de diagramme de Bode : le filtre R-C passe-bas du premier ordre

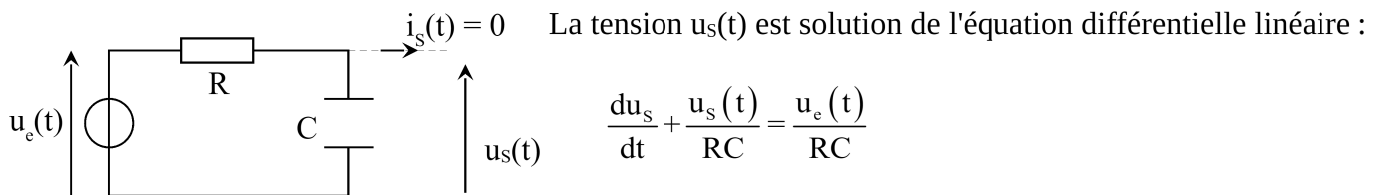


- a) Détermination rapide de la nature du filtre
- b) Fonction de transfert
- c) Diagramme de Bode asymptotique
- d) Bande passante à -3dB
- e) Ordre du filtre
- f) Caractère intégrateur

III- REPONSE D'UN FILTRE LINEAIRE A UN SIGNAL D'ENTREE PERIODIQUE

III-1- Exemple du circuit RC passe-bas

On considère le circuit suivant :



Le générateur délivre une tension sinusoïdale, la tension $u_c(t)$ sera donc en régime forcé, sinusoïdale de même pulsation que celle du générateur.

Si $u_{e1}(t) = E_1 \cos(\omega_1 t)$, la solution de $\frac{du_{s1}}{dt} + \frac{u_{s1}(t)}{RC} = \frac{u_{e1}(t)}{RC}$ (1) est du type : $u_{s1}(t) = U_{s1} \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$

Si $u_{e2}(t) = E_2 \cos(\omega_2 t)$, la solution de $\frac{du_{s2}}{dt} + \frac{u_{s2}(t)}{RC} = \frac{u_{e2}(t)}{RC}$ (2) est du type : $u_{s2}(t) = U_{s2} \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$

Combinaison des 2 équations (1) + (2), les opérations étant linéaires :

$$\frac{d(u_{s1} + u_{s2})}{dt} + \frac{u_{s1}(t) + u_{s2}(t)}{RC} = \frac{u_{e1}(t) + u_{e2}(t)}{RC}$$

Conclusion : Si la tension d'entrée est la somme de deux tensions sinusoïdales alors la tension de sortie est également la somme de deux tensions sinusoïdales de mêmes fréquences que les tensions d'entrée.

Chacune des composantes du signal de sortie correspond à la réponse du circuit à la composante d'entrée possédant la même fréquence.

III-2- Généralisation

- Réponse harmonique : Si la tension d'entrée est sinusoïdale de pulsation ω alors la tension de sortie est également sinusoïdale et de même pulsation.

Si par exemple : $u_e(t) = U_e \cos(\omega t + \varphi)$

$$\text{alors } \underline{u_s} = \underline{H}(j\omega) \underline{u_e} = |\underline{H}|(\omega) e^{j\arg(\underline{H}(j\omega))} \underline{u_e} \text{ avec } \underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{u_s}(j\omega)}{\underline{u_e}(j\omega)}$$

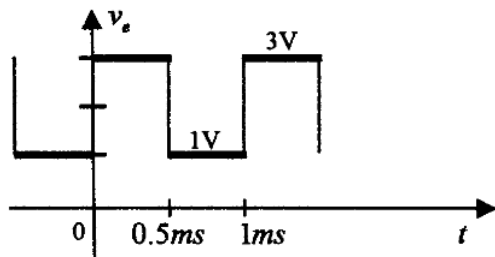
$$\text{soit : } u_s(t) = |\underline{H}(\omega)| U_e \cos((\omega)t + \varphi + \arg(\underline{H}(\omega)))$$

- Principe de superposition : Dans le cas où la tension d'entrée résulte de la superposition de plusieurs signaux sinusoïdaux, alors la tension de sortie est la somme des réponses du filtre à chacune des sinusoïdes constituant le signal d'entrée :

$$\text{Pour } u_e(t) = \sum_{k=0}^{\infty} U_{ek} \cos(k2\pi f t + \varphi_k) \text{ on a : } u_s(t) = \sum_{k=0}^{\infty} |\underline{H}|(k\omega) U_{ek} \cos(k2\pi f t + \varphi_k + \arg(\underline{H}(k\omega)))$$

III-3- Exemple

On considère le signal carré $v_e(t)$ ci-dessous :



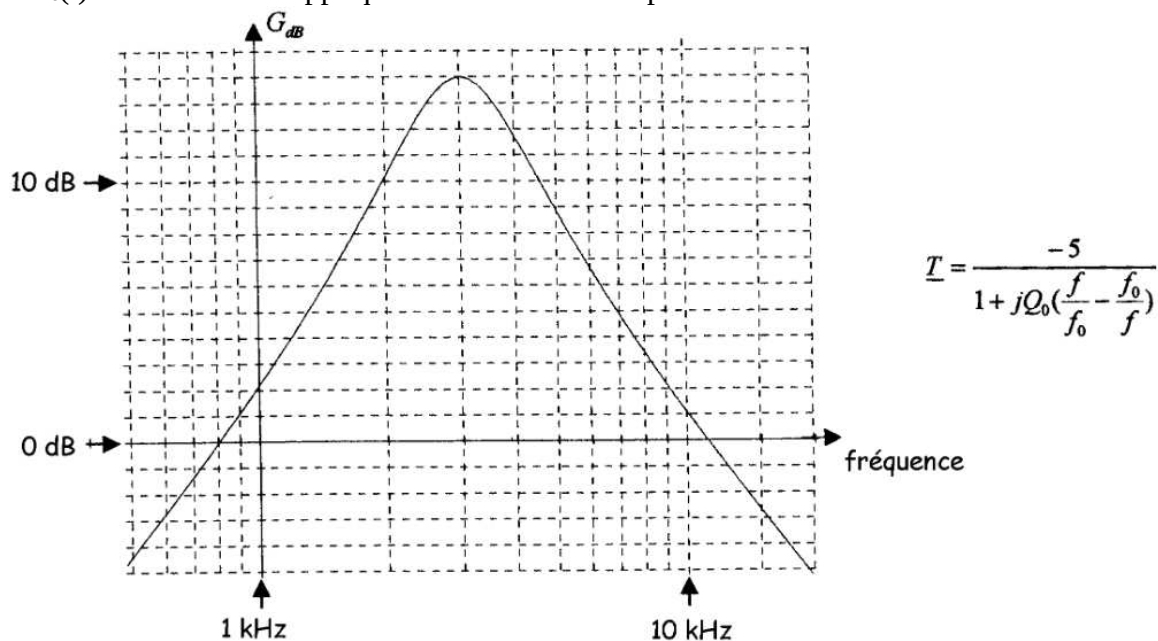
$$v_e = 2 + \frac{4}{\pi} \sin 2\pi f_e t + \frac{4}{3\pi} \sin 2\pi 3 f_e t + \frac{4}{5\pi} \sin 2\pi 5 f_e t + \dots$$

Les questions ci-dessous seront traitées sur une feuille à part.

- 1) Compléter le tableau suivant pour la tension d'entrée $v_e(t)$ avec les valeurs numériques et tracer le spectre du signal $v_e(t)$:

Nom	Composante continue	Fondamental	Harmonique rang 3	Harmonique rang 5
Fréquence				
Amplitude				

Le signal $v_e(t)$ est maintenant appliqué à l'entrée du filtre passe-bande défini ci-dessous :

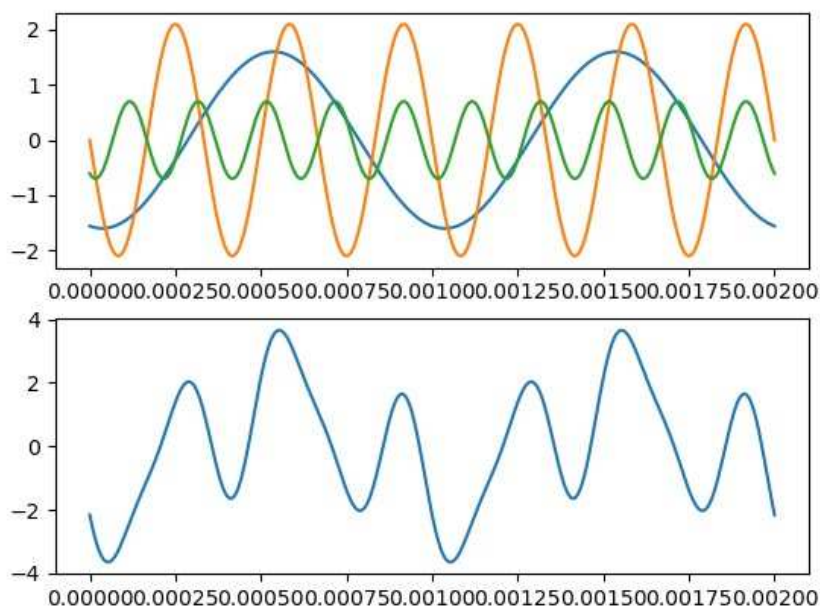


- 2) Déterminer graphiquement le gain en décibel maximal G_{dBmax} du filtre, sa fréquence centrale f_0 et sa bande passante à -3dB notée B. Calculer le facteur de qualité Q_0 de ce filtre.
- 3) Compléter le tableau suivant pour le signal $v_s(t)$ avec les valeurs numériques puis tracer le spectre du signal $v_s(t)$.

Nom	Composante continue	Fondamental	Harmonique rang 3	Harmonique rang 5
Fréquence				
GdB				
T				
Amplitude				
Déphasage				

- 4) Calculer la valeur efficace de $v_s(t)$.

Le signal de sortie en fonction du temps $v_s(t)$ est représenté sur le graphe ci-dessous :



IV- MODÉLISATION D'UN QUADRIPOLE ET MISE EN CASCADE DE FILTRES

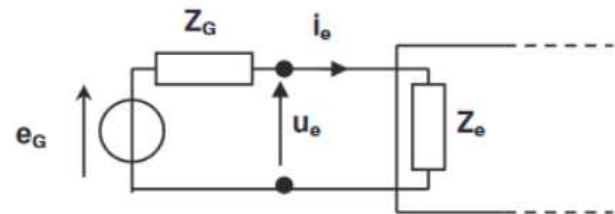
IV-1-- Modélisation de l'entrée

Le quadripôle est inséré dans une chaîne électronique ; il est ainsi connecté, côté entrée, à un générateur, et côté sortie à une impédance appelée impédance de charge.

Pour le générateur (e_G , Z_G), le quadripôle représente un récepteur.

Il est donc vu comme une impédance Z_e :
Cette impédance est nommée impédance

d'entrée : $\underline{Z_e} = \frac{u_e}{i_e}$



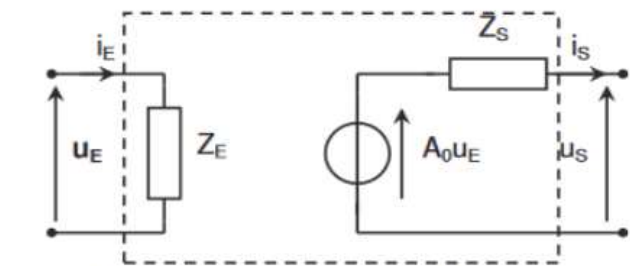
Elle n'a, le plus souvent, aucune existence physique, mais résulte d'un calcul.

L'impédance d'entrée peut dépendre des conditions de fonctionnement du quadripôle, en particulier de la charge à laquelle sa sortie est connectée.

IV-2- Modélisation de la sortie

Pour la charge, le quadripôle est assimilable à un générateur.

Dans la mesure où il fonctionne de façon linéaire, il peut être décrit par un générateur de Thévenin.

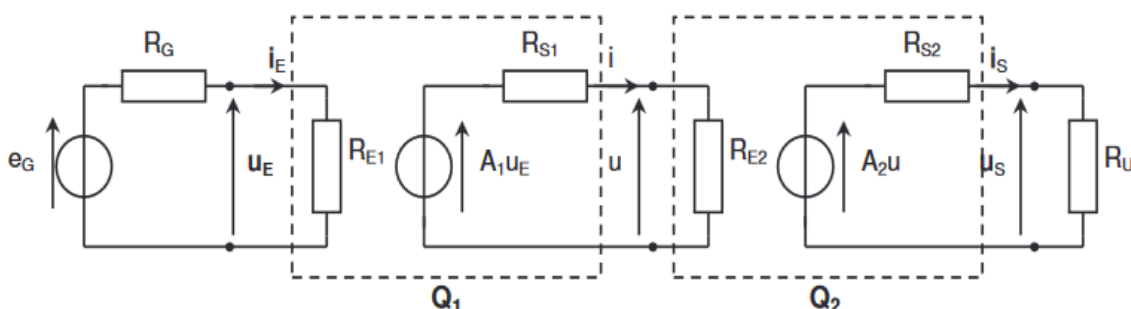


A_0 est l'amplification en tension à vide

On appelle impédance de sortie d'un quadripôle, l'impédance interne du générateur modèle de sa sortie. Elle peut dépendre de l'impédance Z_G de sortie du générateur de commande.

A vide (en circuit ouvert), la fonction de transfert du quadripôle est $\frac{u_S}{u_e} = \underline{A_0}$

IV-3- Mise en cascade de quadripôles



Le quadripôle Q_1 n'est pas à vide, il est suivi d'un second quadripôle Q_2 dont la présence modifie la fonction de transfert de Q_1 par rapport à la situation à vide.

A vide on a : $\frac{\underline{u}}{\underline{u}_e} = \underline{A}_1$

En présence de Q_2 on a : $\frac{\underline{u}}{\underline{u}_e} = \frac{R_{e2}}{R_{s1} + R_{e2}} \underline{A}_1$

Pour que la fonction de transfert de Q_1 soit inchangée, il faut $R_{s1} \ll R_{e2}$.

Dans ce cas, la sortie de Q_1 est équivalente à un générateur idéal de tension c'est-à-dire que Q_1 délivre en sortie une tension indépendante de la charge en aval.

De même, si $R_u \gg R_{s2}$ alors $\frac{\underline{u}_s}{\underline{u}} = \underline{A}_2$.

La fonction de transfert globale est alors le produit des fonctions de transfert à vide de chacun des

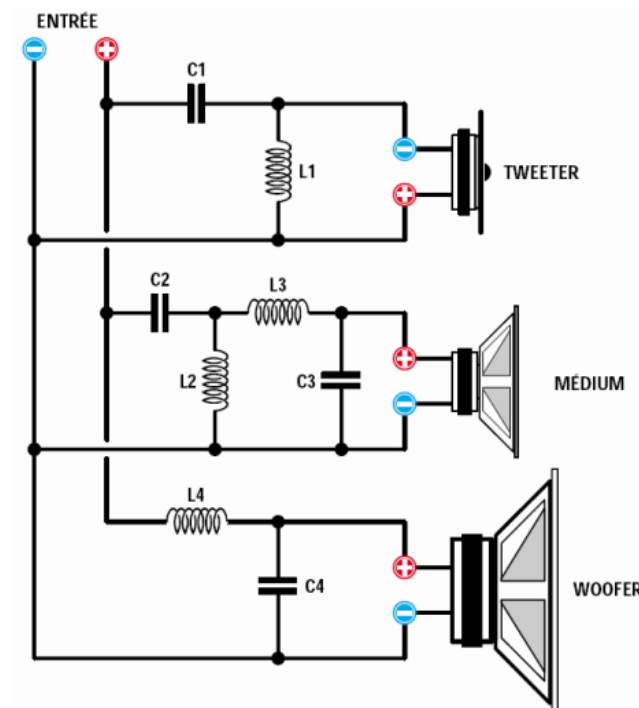
quadripôles : $\frac{\underline{u}_s}{\underline{u}_e} = \frac{\underline{u}_s}{\underline{u}} \frac{\underline{u}}{\underline{u}_e} = \underline{A}_1 \underline{A}_2$.

Pour que la fonction de transfert d'un filtre ne soit pas modifiée par le filtre suivant il faut que l'impédance de sortie du premier soit faible par rapport à l'impédance d'entrée du second.
Son fonctionnement est alors proche de son fonctionnement à vide.

V- EXEMPLES D'UTILISATION DES FILTRES

- Enceintes de haut-parleurs : La réponse en fréquences d'un haut-parleur n'est pas plate. Toutes les fréquences ne sont pas transmises avec le même gain. On utilise donc dans les enceintes trois haut-parleurs avec des filtres passe-bas pour les graves, passe-bande pour les medium, passe-haut pour les aigus intercalés entre l'ampli et les haut-parleurs. Chacun des haut-parleurs possède une réponse plate dans son domaine de fréquences.

Exemple de schéma électrique :



- Filtre passe-bas dans les moyenneurs.

Exemple : les voltmètres affichent la valeur de la tension moyenne (en DC) ou de la tension efficace à leur bornes (AC) : $V_{\text{eff}} = \sqrt{\langle v^2(t) \rangle}$.

La valeur moyenne d'un signal correspond à sa composante continue (fréquence nulle) d'où l'utilité du filtre passe-bas pour extraire la valeur moyenne d'un signal.

- Filtre passe bas dans les alimentations en courant continu pour éliminer les restes d'ondulation du redresseur qui a transformé le signal sinusoïdal du réseau en tension continue permettant l'alimentation des circuits électroniques (ordinateurs, téléphones portables ...).
- Filtre passe-haut pour supprimer la composante continue d'un signal (couplage CA sur l'oscillo).

VI- PRINCIPE DU FILTRAGE NUMÉRIQUE

Pour illustrer le principe de fonctionnement d'un filtre numérique, on peut prendre l'exemple d'un filtre

RC passe-bas (cf. I-1-b) de fonction de transfert : $\underline{H}(j\omega) = \frac{u_s}{u_e} = \frac{1}{1 + jRC\omega}$.

Dans le domaine temporel cette fonction de transfert correspond à l'équation différentielle :

$$\frac{du_s}{dt} + \frac{u_s}{RC} = \frac{u_e}{RC} \text{ où } u_e(t) \text{ et } u_s(t) \text{ sont des tensions analogiques continues.}$$

Pour l'utiliser avec des signaux numérisés échantillonnés et donc discontinus, il faut la discrétiser.

On ne dispose que des valeurs de la tension d'entrée aux instants $t = kT_e$ avec T_e la durée entre deux échantillons (période d'échantillonnage) et de la valeur initiale de $u_s(t)$.

En assimilant la dérivée temporelle à une petite variation de tension pendant T_e , on peut obtenir, connaissant $u_s(kT_e)$ et $u_e(kT_e)$ la valeur de $u_s((k+1)T_e)$:

$$\frac{u_s((k+1)T_e) - u_s(kT_e)}{T_e} + \frac{u_s(kT_e)}{RC} = \frac{u_e(kT_e)}{RC}$$

On obtient ainsi de proche en proche toutes les valeurs de $u_s(kT_e)$:

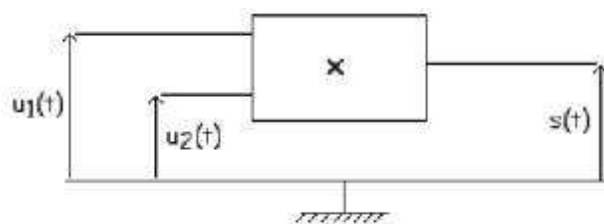
$$u_s((k+1)T_e) = u_s(kT_e) - T_e \frac{u_s(kT_e)}{RC} + T_e \frac{u_e(kT_e)}{RC}$$

VII- OUVERTURE AUX SYSTÈMES NON LINÉAIRES

VII-1- Exemples

a- Circuit multiplieur

Le circuit ci-dessous réalise la multiplication de deux tensions. Cette opération est non linéaire.



Soient $u_1(t) = U_1 \cos(\omega_1 t)$ et $u_2(t) = U_2 \cos(\omega_2 t)$.

On obtient alors une tension $s(t)$ en sortie du multiplieur que l'on peut écrire sous la forme :

$$s(t) = U_1 \cos(\omega_1 t) U_2 \cos(\omega_2 t) = \frac{U_1 U_2}{2} \cos((\omega_1 + \omega_2) t) + \frac{U_1 U_2}{2} \cos((\omega_1 - \omega_2) t)$$

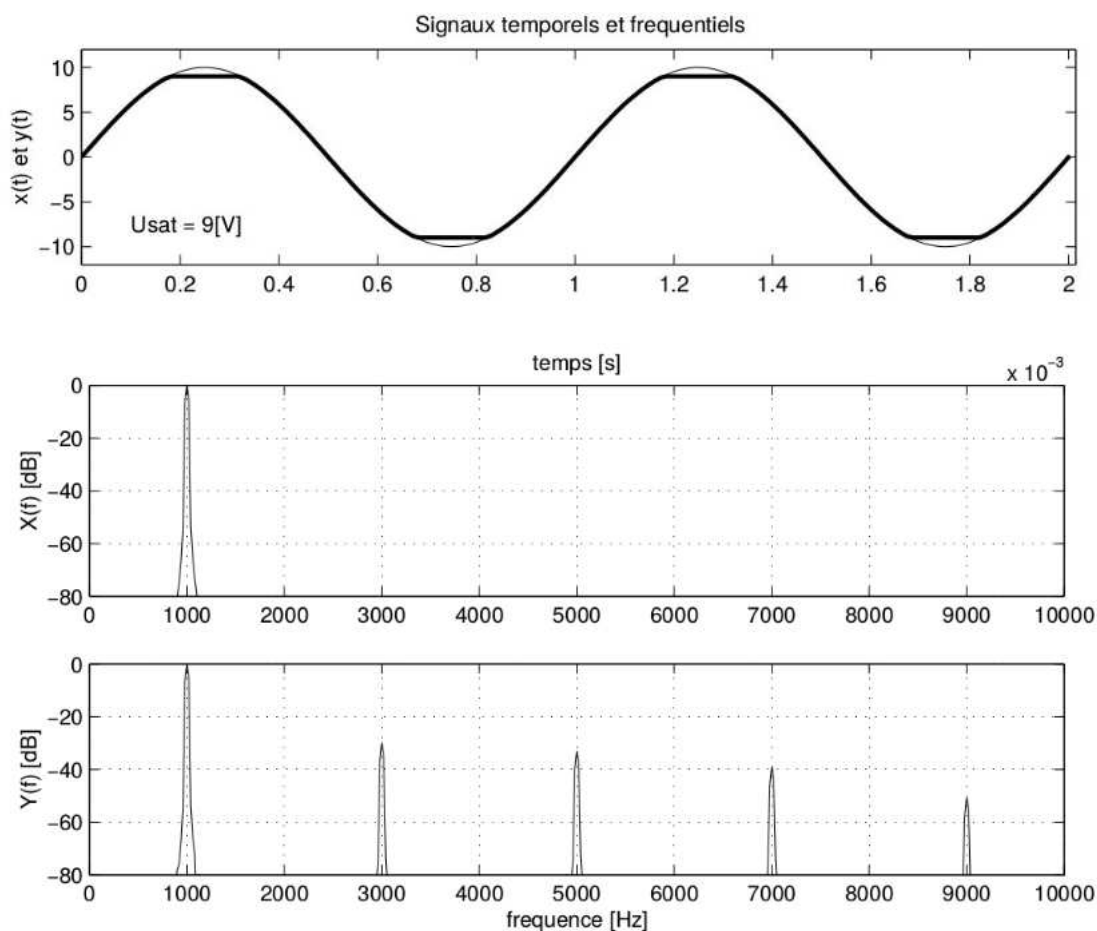
Le signal de sortie contient des fréquences qui n'étaient pas présentes dans les signaux entrés.

b- Saturation

Les figures ci-dessous représentent une tension sinusoïdale $x(t)$ d'amplitude 10 V et une tension sinusoïdale $y(t)$ écrêtée à ± 9 V ainsi que les spectres correspondants.

La relation entre les deux tensions n'est pas linéaire.

On voit que le signal saturé contient des fréquences qui n'étaient pas présentes dans la sinusoïde de départ.

**VII-2- Généralisation**

Le caractère non linéaire d'un circuit se traduit par l'apparition de nouvelles fréquences en sortie.

L'examen du contenu spectral du signal de sortie associé à une entrée sinusoïdale permet de mettre en évidence et de quantifier la non linéarité d'un système.

Extrait du programme relatif à ce chapitre :

Dans la première partie intitulée « **Signaux périodiques** », l'accent est mis sur l'action d'un filtre linéaire sur un signal périodique, l'objectif étant de comprendre le rôle central de la linéarité des systèmes pour interpréter la forme du signal de sortie.

Notions et contenus	Capacités exigibles
2.1. Signaux périodiques	
Signaux périodiques.	Commenter le spectre d'un signal périodique : selon leur rang, attribuer aux différents harmoniques le rôle qu'elles jouent dans la forme du signal analysé.
Action d'un filtre linéaire du premier ou du second ordre sur un signal périodique.	Prévoir l'effet d'un filtrage linéaire sur la composition spectrale d'un signal périodique. Expliciter les conditions pour obtenir un comportement intégrateur ou dérivateur. Mettre en œuvre un dispositif expérimental illustrant l'action d'un filtre sur un signal périodique.