

---

## ANALYSE DE FOURIER ET FILTRAGE D'UN SIGNAL ANALOGIQUE

---

### Exercice 1 : Effet d'un filtre passe-haut (extrait de TD MPI lycée Thiers)

---

On considère un filtre passe-haut du premier ordre de gain en dB maximal de 0 dont la fréquence de coupure est de 100 Hz. Donner l'allure du signal en sortie si on envoie en entrée :

1. Une sinusoïde d'amplitude 4V et de fréquence 2 kHz.
2. Une sinusoïde d'amplitude 4V et de fréquence 2 kHz plus une tension continue de 1 V.
3. Un créneau de valeur moyenne nulle et d'amplitude 4V et de fréquence 2 kHz plus une tension continue de 1 V.
4. Un signal triangle de valeur moyenne nulle et d'amplitude 4V et de fréquence 2 Hz.

### Exercice 2 : Réponse d'un filtre passe-bas à une excitation créneau (ENS Lyon PC 2014)

---

On considère un système physique linéaire dont la fonction de transfert s'écrit :

$$H(j\omega) \equiv \frac{\tilde{S}}{\tilde{E}} = \frac{1}{1 + j\tau\omega} \quad (\tau \in \mathbb{R}_+^*)$$

1. Représenter en précisant les entrées et sorties un modèle de système électrique et de système mécanique présentant une fonction de transfert de ce type.
2. Représenter le diagramme de Bode de ce filtre (gain et phase). Préciser le domaine fréquentiel sur lequel ce système se comporte comme un intégrateur.
3. Le filtre est soumis à son entrée à un signal périodique de période T tel que :

$$e(t) = \begin{cases} E & \text{si } t \in ]nT, nT + T/2[ \\ E/2 & \text{si } t = qT/2 \\ 0 & \text{si } t \in ]nT + T/2, nT + T[ \end{cases} \quad \begin{matrix} (E > 0, n \in \mathbb{Z}) \\ (q \in \mathbb{Z}) \end{matrix}$$

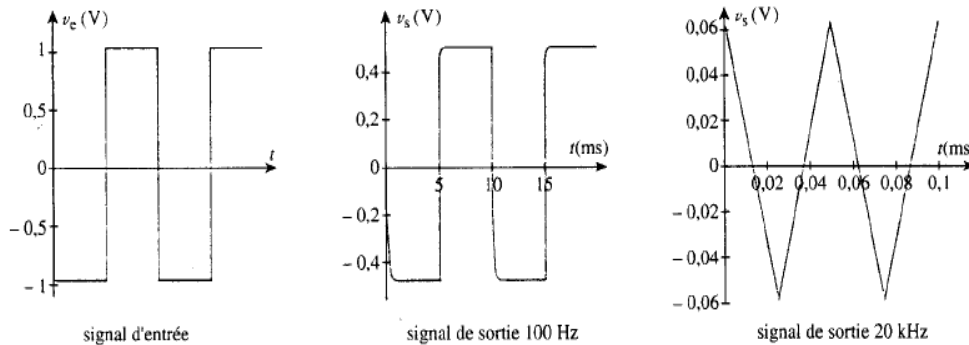
Sa décomposition en série de Fourier s'écrit :

$$e(t) = \frac{E}{2} + \frac{2E}{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{2p+1} \sin[(2p+1)\omega_F t] \quad \text{où } \omega_F = 2\pi/T \quad (\text{pulsation fondamentale})$$

- a) Dans chacun des cas (a)  $T \gg \tau$  et (b)  $T \ll \tau$ , représenter les amplitudes spectrales de l'entrée  $e(t)$ .
- b) Représenter le signal de sortie  $s(t)$  en correspondance avec celui d'entrée pour ces deux cas extrêmes (sans calcul mais en justifiant ces tracés).
- c) Dans la limite  $T \ll \tau$ , donner la décomposition en série de Fourier du signal  $s(t)$ .

**Exercice 3** : Caractéristiques d'un filtre du premier ordre

Les graphes représentés ci-dessous donnent la réponse d'un filtre du premier ordre à un signal créneau d'amplitude 1V, de fréquence 100 Hz et 20 kHz.  
Déterminer le type du filtre et sa fréquence caractéristique.



**Rappels** : filtre passe-bas d'ordre 1 :  $\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{H_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}$ , passe-haut d'ordre 1 :  $\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{H_0 j\frac{\omega}{\omega_0}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}$

**Exercice 4** : Multiplication de signaux, modulation d'amplitude

Les ondes sonores sont des ondes mécaniques de fréquences comprises entre 20 Hz et 20 kHz. Leur transmission s'effectue sous forme d'onde électromagnétique de l'émetteur (ex : station de radio) au récepteur.

Dans cette gamme, les ondes électromagnétiques s'atténuent rapidement. On ne peut alors pas transmettre directement les fréquences audibles. On peut les moduler par un signal appelé porteuse de fréquence bien supérieure ( $3 \cdot 10^5$  Hz-  $3 \cdot 10^{11}$  Hz : fréquences hertziennes). On s'intéresse ici à un type de modulation appelé modulation d'amplitude (AM).

On attribue à chaque station émettrice une fréquence porteuse.

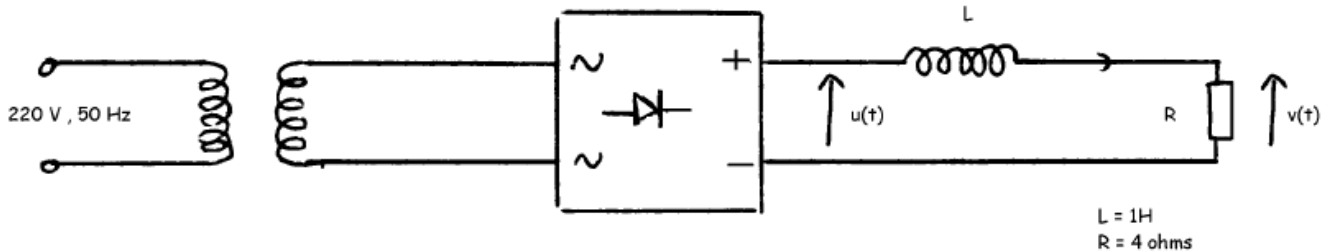
A partir d'un signal  $e(t) = E \cos(\omega_M t)$  et d'une porteuse haute fréquence  $p(t) = S \sin(\omega_P t)$ , on génère un signal modulé en amplitude  $s(t) = p(t) + k p(t)e(t) = S[1 + m \cos(\omega_M t)] \sin \omega_P t$  porteur de l'information initiale et qui sera transmis.  $m$  est appelé taux de modulation.

1. Dessiner l'allure du signal  $s(t)$ .
2. Tracer son spectre en fréquence.
3. France-inter émet sur les grandes ondes (radio AM) à la fréquence 162 kHz. Soit un signal de tension modulé en amplitude créé avec une onde porteuse de fréquence  $f_P = 162$  kHz et un signal de modulation sinusoïdal de fréquence  $f_M = 3$  kHz.
  - a. Quelles sont les fréquences contenues dans le signal modulé ?
  - b. Sachant que la loi autorise une largeur de bande maximale de 9 kHz, que peut-on en conclure sur la qualité de retransmission musicale en radio AM ?

**Exercice 5 : Efficacité d'une bobine de lissage**

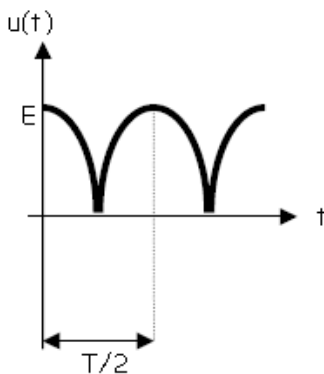
On veut transformer le courant sinusoïdal du secteur en une tension continue.

On utilise pour cela un montage comportant un transformateur abaisseur, un pont redresseur double alternance et une inductance de filtrage alimente une charge R.



La tension en entrée du pont est sinusoïdale de pulsation  $\omega$ .

La tension en sortie du pont est une tension redressée double alternance d'amplitude 20V.



$$u(t) = \frac{2E}{\pi} \left[ 1 + \frac{2 \cos(2\omega t)}{3} + \frac{2 \cos(4\omega t)}{15} + \dots \right]$$

- 1) En utilisant la décomposition en série de Fourier de  $u(t)$ , calculer la valeur moyenne  $U_0$  de la tension  $u(t)$ , ainsi que les amplitudes  $U_2$  et  $U_4$  des harmoniques 2 et 4.
- 2) Pourquoi la fréquence 50 Hz n'est-elle pas présente dans le signal  $u(t)$  ? Tracer le spectre de la tension  $u(t)$  en se limitant aux 3 premières raies.
- 3) Tracer le spectre de la tension  $v(t)$  aux bornes de la charge.
- 4) Esquisser son allure temporelle et donner une estimation de la valeur crête à crête de son ondulation  $\Delta v$  en ne conservant que l'harmonique prépondérante.

**Remarque :** Ce dispositif de filtrage est très utilisé dans les applications à courants forts où le filtrage par condensateur nécessiterait des valeurs de capacités beaucoup trop élevées.

Quelques résultats

---

Exercice 3 : passe-bas, fréquence de coupure à 1,5 kHz

Exercice 4 : 3a) Il y a trois composantes spectrales :  $f_p = 162\text{kHz}$ ,  $f_p + f_M = 172\text{kHz}$  et  $f_p - f_M = 152\text{kHz}$   
3b)  $P_B = 220\text{ kW}$  et  $P_p = 1561\text{ kW}$

Exercice 5 : 1)  $U_0 = 13\text{V}$ ,  $U_2 = 8,5\text{ V}$ ,  $U_4 = 1,7\text{ V}$  ;  
4) Ondulation crête à crête de l'ordre de 100 mV.