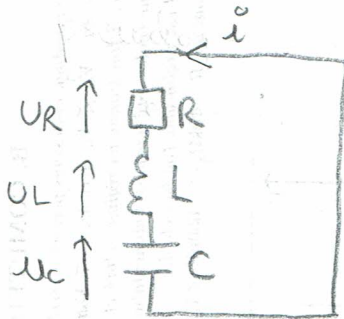


Oscillations et facteur de qualité

(1)

- On considère un circuit R-L-C série en régime ehta =



$$u_C + u_L + u_R = 0$$

$$\text{avec } i = C \frac{du_C}{dt}, u_R = Ri \text{ et } u_L = L \frac{di}{dt}$$

donc :

$$u_C + L \frac{di}{dt} + Ri = 0$$

Circuit initialement chargé

$$\text{soit : } u_C + LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + RC \frac{du_C}{dt} = 0$$

$$\text{ou } \boxed{\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{LC} u_C(t) = 0}$$

- Forme canonique : $\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du_C}{dt} + \omega_0^2 u_C(t) = 0$

On peut poser $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

puissance propre du circuit.
c'est la puissance des oscillations non amorties c'est-à-dire quand $R=0$ (pas de dissipation d'énergie par effet Joule).

Dans ce cas $\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \omega_0^2 u_C(t) = 0$

On a un oscillateur harmonique.

$$\text{et } Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Plus l'amortissement est faible et plus Q est grand.

Dans le cas limite de l'oscillateur harmonique $R=0 \Rightarrow Q \rightarrow \infty$.

- Polynôme caractéristique associé à l'équation différentielle :

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 = 0$$

Pour un régime pseudo-périodique : $\Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2 < 0$
soit $Q > \frac{1}{2}$

On a alors
$$r_{1,2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \frac{i}{2} \sqrt{4\omega_0^2 - \frac{\omega_0^2}{Q^2}}$$
$$= -\frac{\omega_0}{2Q} \pm i \frac{\omega_0}{2Q} \sqrt{4Q^2 - 1}$$

et $u_c(t) = A \exp\left(-\frac{t}{2\tau}\right) \cos(\omega t + \varphi)$

avec $-\frac{1}{2\tau} = \text{Re}(\underline{r}) = -\frac{\omega_0}{2Q}$

et $\omega = |\text{Im}(\underline{r})| = \frac{\omega_0}{2Q} \sqrt{4Q^2 - 1} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} < \omega_0$
 $\hookrightarrow$ pseudopulsation = pulsation des oscillations amorties : $\omega < \omega_0$

1) Cas $Q \gg 1$: $\omega \simeq \omega_0$ (logique car peu d'amortissement)

2) Amplitude des oscillations à l'instant t :

$$A(t) = A \exp\left(-\frac{t}{2\tau}\right)$$

On cherche $t = NT$ avec N le nombre de pseudopériodes tel que $A(NT) = \frac{A}{20}$

soit $A \exp\left(-\frac{NT}{2\tau}\right) = \frac{A}{20}$

donc

$$NT = 2\tau \ln 20$$

$$N = \frac{2\tau \ln 20}{T} = \frac{2Q}{\omega_0 T} \ln 20 \simeq \frac{2Q}{\omega T} \ln 20$$

$$N = \frac{Q}{\pi} \ln 20 \quad \text{car } \omega T = 2\pi$$

$$\boxed{N = 0,95 Q}$$

$\Rightarrow$ le nombre d'oscillations observables est de l'ordre de Q