

TD langages réguliers Exo 3 - Longues - nite

Q3 MQ $\forall u \in \Sigma^*, \exists! (v, w) \in X^* \times Y^*, u = v \cdot w$.

Unicité Soit $u \in \Sigma^*$. Supposons qu'il existe $(v, w) \in X^* \times Y^*$ tq $u = v \cdot w$
 $(v', w') \in X^* \times Y^*$ tq $u = v' \cdot w'$

Quitte à échanger (v, w) et (v', w') , supposons que $|v| \leq |v'|$.

$$\text{Si } |v| < |v'|, w_1 = u_{|v|+1} = v'_{|v|+1} = b$$

$\uparrow$ car $u = v \cdot w$ $\uparrow$ car $u = v' \cdot w'$ $\uparrow$ car $v' \in X^*$

pourtant $w_1 \neq b$ par déf de $w \in Y^*$. CONTRADICTION

Donc $|v| = |v'|$, on en déduit $v = v'$ et $w = w'$.

D'où l'unicité.

Existence Soit $u \in \Sigma^*$.

- Si $u \in \{b\}^*$, en posant $v = u$ on a bien $v \in X^*$ et $w = \epsilon$ et $u = v \cdot w$.

- Sinon, il existe une lettre de u qui diffère de b (en fait $u \neq \epsilon$)
on peut donc définir $i_0 = \min\{i \in [1, |u|] \mid u_i \neq b\}$.

Par minimalité de i_0 , $\forall i \in [1, i_0], u_i = b$, donc $u_1 - u_{i_0-1} \in \{b\}^*$

et par déf de i_0 , $u_{i_0} \neq b$ donc $u_{i_0} - u_n \in Y^*$ d'après Q2.

Ainsi $v = (u_1 - u_{i_0-1})$ et $w = (u_{i_0} - u_n)$ conviendront.

D'où l'existence.