

TD Langages réguliers

Exercice 5: une équivalence sur les mots.

$$\forall u, v \in \Sigma^* \times \Sigma^*, u \equiv v \Leftrightarrow \exists (x, y) \in \Sigma^* \times \Sigma^* \begin{cases} u = xy \\ v = yx \end{cases}$$

Q1 $\equiv$ est une relation d'équivalence.

- Soit $u \in \Sigma^*$. On a $u = u \cdot \varepsilon = \varepsilon \cdot u$ et $(u, \varepsilon) \in \Sigma^* \times \Sigma^*$.
Ainsi $u \equiv u$. D'où $\equiv$ est réflexive.

D'où la réflexivité de $\equiv$

- Soit $(u, v) \in \Sigma^* \times \Sigma^*$ tel que $u \equiv v$.
Par déf. de $\equiv$ il existe alors $(x, y) \in \Sigma^* \times \Sigma^*$ tq $\begin{cases} u = xy \\ v = yx \end{cases}$
En posant $x' = y$ et $y' = x$, on a $(x', y') \in \Sigma^* \times \Sigma^*$ et $\begin{cases} v = x'y' \\ u = y'x' \end{cases}$
donc $v \equiv u$.

D'où la symétrie de $\equiv$

- Soit $(u, v, w) \in \Sigma^* \times \Sigma^* \times \Sigma^*$ tel que $u \equiv v$ et $v \equiv w$.

Par déf. de $\equiv$, il existe alors $(x, y, x', y') \in (\Sigma^*)^4$ tq $\begin{cases} u = xy \\ v = yx \end{cases}$ et $\begin{cases} v = x'y' \\ w = y'x' \end{cases}$
En particulier on a $yx = v = x'y'$, donc y et x' sont préfixes du même mot v .

- Si $|y| \leq |x'|$, alors y est préfixe de x' , donc il existe $s \in \Sigma^*$ tel que $x' = y \cdot s$.

Alors $yx = v = x'y' = (y \cdot s) \cdot y' = y \cdot (s \cdot y')$, ainsi $x = s \cdot y'$.

On a alors $u = xy = (s \cdot y') \cdot y = s \cdot (y'y)$

$w = y'x' = y' \cdot (y \cdot s) = (y' \cdot y) \cdot s$

Comme $(s, y' \cdot y) \in \Sigma^* \times \Sigma^*$, on en déduit $u \equiv w$.

- Si $|x'| \leq |y|$ on montre de même que $u \equiv w$.

D'où la transitivité de $\equiv$