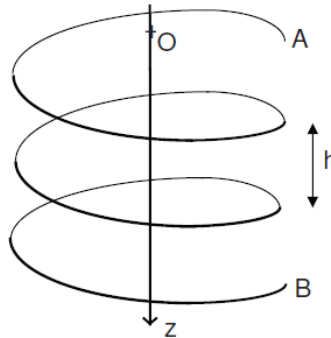

MECANIQUE DU POINT : EXERCICES DE REVISION DE MP2I

Exercice 1 : Descente de toboggan

Un enfant descend un toboggan représenté sur la figure suivante :



Pour l'étude du mouvement, on propose le modèle suivant :

- L'enfant de masse $m = 50 \text{ kg}$ est assimilé à un point matériel M .
- Le toboggan, de forme hélicoïdale, débute en A et se termine en B après 3 tours exactement ; il s'enroule sur un cylindre vertical de rayon $R = 5 \text{ m}$. On néglige tout frottement.
- A chaque tour complet, l'enfant descend d'une hauteur h .

Le point M , initialement immobile en A , est repéré par ses coordonnées cylindriques (r, θ, z) , z étant la cote du point M sur l'axe de symétrie de la trajectoire, choisi vertical descendant.

L'origine O de l'axe Oz est choisie à l'intersection de cet axe et du plan horizontal passant par A .

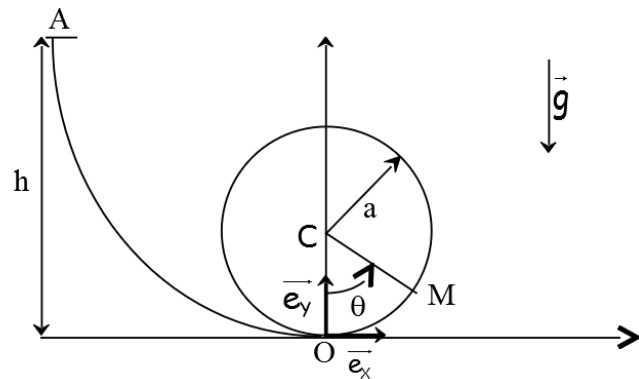
On donne l'intensité du champ de pesanteur $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$.

On note $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ la base locale orthonormée directe associée au système des coordonnées cylindriques.

- 1) Les équations de la trajectoire sont données par les relations : $r(\theta) = R$ et $z(\theta) = \gamma \cdot \theta$ où γ est une constante positive. Exprimer h en fonction de γ .
- 2) Exprimer le vecteur position et le vecteur vitesse du point M en fonction de R , θ et z et de leurs dérivées temporelles $\dot{\theta}$, $\dot{z}$.
- 3) Montrer que l'énergie mécanique de l'enfant peut se mettre sous la forme : $E_m = \frac{1}{2} A \dot{z}^2 - Bz$, où A et B sont des constantes à expliciter en fonction des données.
- 4) Déterminer la vitesse v_s de l'enfant en sortie de toboggan en fonction de g et h .
- 5) Déterminer l'équation différentielle satisfaite par $z(t)$ et en déduire la durée T de la descente en fonction de A , B et h .
- 6) Si on prend en compte une force de frottement opposée au vecteur vitesse et de norme constante F , exprimer l'énergie perdue par l'enfant au cours de la descente, en fonction de F , R et γ . On considèrera le frottement comme une perturbation. On pourra donc encore utiliser la loi $z(t)$ déterminée précédemment.

Exercice 2 : Conservation de l'énergie mécanique, principe fondamental de la dynamique

Une bille, assimilée à un point matériel M de masse m , est lâchée sans vitesse initiale depuis le point A d'une gouttière situé à une hauteur h du point le plus bas O de la gouttière. Cette dernière est terminée en O par un guide circulaire de rayon a , disposé verticalement. La bille, dont on suppose que le mouvement a lieu sans frottement, peut éventuellement quitter la gouttière vers l'intérieur du cercle.



- 1-Exprimer la norme v_0 de la vitesse de la bille en O.
- 2- Exprimer la norme v_M de la vitesse de la bille en un point M quelconque du cercle repéré par l'angle θ .
- 3-On désigne par $\vec{e}_r = \frac{\vec{CM}}{\|\vec{CM}\|}$ le vecteur unitaire porté par le vecteur position $\vec{CM}$ du point M.

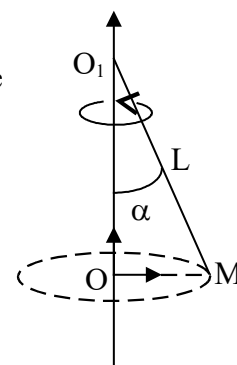
Ecrire l'expression de la réaction $\vec{R} = R\vec{e}_r$ du guide circulaire sur la bille.

- 4-Déterminer la hauteur minimale $h_{\min}$ à partir de laquelle il faut lâcher la bille sans vitesse initiale pour qu'elle ait un mouvement révolutif dans le guide.

Exercice 3 : Pendule conique, théorème du moment cinétique

Un point matériel M de masse m est suspendu à un fil inextensible de longueur L attaché en un point O_1 fixe d'un axe Oz. Le point matériel est astreint à tourner autour de l'axe Oz dans un plan passant par O, à la vitesse angulaire constante ω dans le référentiel lié au laboratoire. La direction du fil fait un angle α constant avec l'axe Oz.

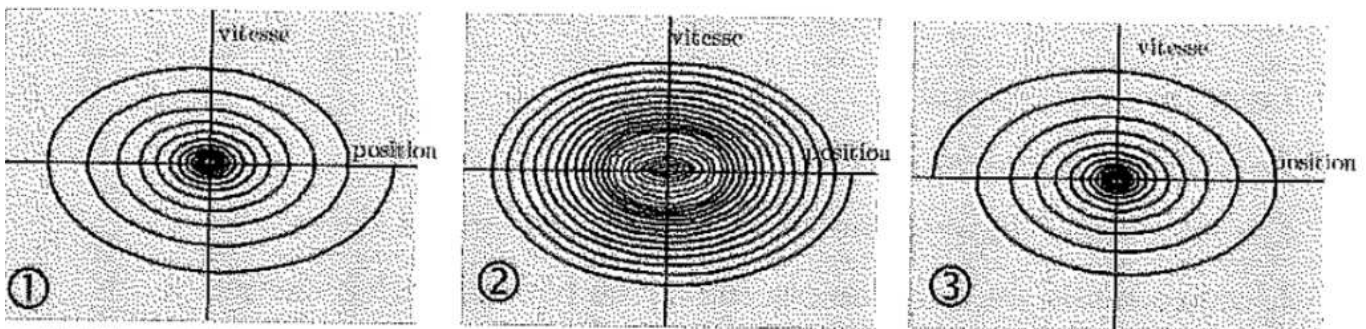
Déterminer l'expression de l'angle d'inclinaison α du pendule avec l'axe Oz en fonction de L , ω et du champ de pesanteur g .



Exercice 4 : Portraits de phase (ICNA 2017)

Les portraits de phase suivants ont été obtenus pour un oscillateur constitué par une masse m , accrochée à un ressort de constante de raideur k , positionnée initialement en X_o , et soumise à une force de frottement visqueux de coefficient de frottement f . A chaque instant, sa position est repérée par rapport à sa position d'équilibre. On note ω la pulsation propre de l'oscillateur.

Les modifications des valeurs des paramètres dans les différents portraits de phase ont été réalisées de manière à ce qu'aucune ambiguïté ne puisse exister. L'échelle est la même pour tous les portraits.



- 1 Les oscillateurs des diagrammes 1 et 2 ont :
 - A) Même pulsation ω , et une masse m différente.
 - B) Même pulsation ω , et un coefficient f différent.
 - C) Même masse m , même constante de raideur k , et un coefficient f différent.
 - D) Même masse m , même constante de raideur k , et une position initiale X_o différente.
- 2 Les oscillateurs des diagrammes 1 et 3 ont :
 - A) Même constante de raideur k , et une masse m différente.
 - B) Même masse m , même constante de raideur k , et un coefficient f différent.
 - C) Même masse m , un coefficient f différent et une constante de raideur k différente.
 - D) Même masse m , même constante de raideur k , et une position initiale X_o différente.
- 7 Une courbe de phase fermée est caractéristique :
 - A) D'un régime périodique.
 - B) D'un régime apériodique.
 - C) De l'existence de frottements.
 - D) De l'absence de frottements.
- 8 Par lecture directe du diagramme on peut déterminer :
 - A) La position initiale.
 - B) La vitesse initiale.
 - C) L'accélération initiale.
 - D) L'énergie mécanique initiale.

9 Par lecture directe du diagramme on peut déterminer :

- A) Le facteur de qualité.
- B) La pseudo-période des oscillations.
- C) La raideur k du ressort.
- D) Le coefficient de frottement f .

10 Un mouvement révolitif (cas d'un pendule pesant) est caractérisé par une courbe :

- A) Circulaire.
- B) Elliptique.
- C) Fermée.
- D) Non fermée.

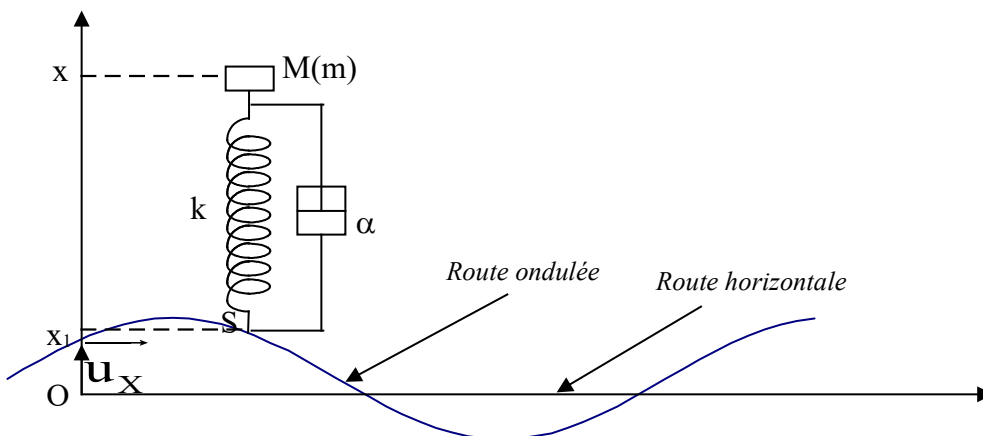
Exercice 5 : Amortisseur d'automobile, régimes libre et forcé

On schématise un véhicule automobile par un point matériel de masse m reposant sur une roue assimilée à un point matériel S par l'intermédiaire d'un ressort de raideur k et de longueur l_0 au repos. Le point S peut se déplacer le long d'une route horizontale ou d'une route ondulée. Le véhicule roule à vitesse horizontale constante.

On repère les points M et S par leurs côtes respectives x et x_1 sur un axe vertical Ox .

En outre le point matériel M est soumis à l'action d'un amortisseur fluide de coefficient d'amortissement α , disposé entre les points S et M . Cet amortisseur exerce une force $\vec{f} = -\alpha(v - v_1)\vec{u}_x$ sur le point M avec $v = \dot{x}$ et $v_1 = \dot{x}_1$ les vitesses respectives de M et S lors de leurs déplacements verticaux.

On s'intéresse dans cet exercice au mouvement vertical du véhicule.



Animation consultable sur le site « Figures animées pour la physique »

1-Déplacement sur la route horizontale ($x_1 = \text{cste} = 0$)

- a) Déterminer la cote x_e de M à l'équilibre en fonction de m , g , k et l_0 .
- b) Le coefficient d'amortissement **α a dans toute la suite de l'exercice une valeur critique $\alpha_c = 2\sqrt{mk}$** . Déterminez l'expression de $x(t)$ en prenant comme conditions initiales $x(0) = x_0$ et $\dot{x}(0) = 0$. Quel est l'intérêt pratique de la présence de cet amortisseur ?

2-Déplacement sur la route ondulée

On pose $X(t) = x(t) - x_e$.

Montrez que $X(t)$ vérifie une équation différentielle du type : $m\ddot{X} + \alpha\dot{X} + kX = F(t)$ avec $F(t)$ une fonction de $x_1(t)$, $\dot{x}_1(t)$, α et k dont on précisera l'expression.

3-Déplacement sur une route de profil sinusoïdal

Dans ce cas $x_1(t)$ est une fonction sinusoïdale du temps de la forme $x_1(t) = X_1 \cos(\omega t)$.

Résolvez cette équation différentielle en régime établi. Déterminez l'amplitude X_m des oscillations de M .

Tracez $X_m(x)$ avec $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ et $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Commentaires ?

Quelques résultats :

Exercice 1 : 1) $h = 2\pi\gamma$; 3) $A = m\left(1 + \frac{R^2}{\gamma^2}\right)$ et $B = mg$; 4) $v_s = \sqrt{6gh}$; 6) $E_{perdue} = 6\pi F \sqrt{R^2 + \gamma^2}$

Exercice 2 : 1) $v_0 = \sqrt{2gh}$; 2) $v_M = \sqrt{2g(h - a + a\cos\theta)}$; 3) $\vec{R} = (-2mg\frac{h}{a} + 2mg - 3mg\cos\theta)\vec{e}_r$
4) $h_{\min} = 2,5a$

Exercice 3 : $\cos\alpha = \frac{g}{L\omega^2}$

Exercice 5 : 1-a) $x_e = l_0 - \frac{mg}{k}$; 1-b) $x(t) = x_e + (x_0 - x_e)(\omega_0 t + 1)e^{-\omega_0 t}$; 2) $F(t) = \alpha\dot{x}_1(t) + kx_1(t)$
3-a) $X_m(x) = \frac{\sqrt{1+4x^2}}{1+x^2} X_1$ avec $x = \frac{\omega}{\omega_0}$