

Piezoelectricité

I - Modèle électrique du quartz

$$1) \begin{cases} \frac{q}{C} + \alpha x = u \\ m\ddot{x} + \delta\dot{x} + kx + \alpha q = 0 \end{cases} \quad (EC)$$

donc $m\ddot{x} + \delta\dot{x} + kx + \alpha C(u - \alpha x) = 0$

soit $m\ddot{x} + \delta\dot{x} + (k - \alpha^2 C)x = -\alpha C u$

$$\frac{d}{dt} \left(m \frac{dx}{dt} + \delta x + (k - \alpha^2 C)x \right) = -\alpha C \frac{du}{dt} \quad (E)$$

2) Il y a stabilité du système si $x(t)$ converge pour $u=0$.

Il faut pour cela que tous les coefficients de l'équation différentielle soient de même signe d'où ici que $k - \alpha^2 C > 0$.

3) L'équation (E) devient :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\delta}{m} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x(t) = -\frac{\alpha C}{m} \frac{du(t)}{dt}$$

soit $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x(t) = -\frac{\alpha C}{m} \frac{du}{dt}$ forme canonique de (E)

4) Discriminant du polynôme associé à l'équation homogène :

$$\Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2 = \omega_0^2 \left(\frac{1}{Q^2} - 4 \right) < 0 \text{ pour } Q > \frac{1}{2}$$

donc $x(t) = A e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} \cos(\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} t + \varphi)$

Or $x(0) = 0 = A \cos \varphi$ avec $A \neq 0$ sinon $\forall t, x(t) = 0$ pas de mouvement
Avec le choix $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ on obtient :

$$x(t) = A e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} \sin(\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} t)$$

soit $x(t) = A e^{-t/\tau} \sin(\omega_0' t)$ avec $\tau = \frac{2Q}{\omega_0}$
et $\omega_0' = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$

Pour $Q \gg 1$ $\omega_0' \simeq \omega_0$

C'est le cas limite de l'oscillateur harmonique.

5) enveloppe du signal $ct(t) = Ae^{-t/\tau}$

Pour $t = \tau_q$: $ct(\tau_q) = \frac{5}{100} A(0)$

soit $Ae^{-\tau_q/\tau} = \frac{5}{100} A$

donc $\tau_q = \tau \ln 20 = \frac{20}{\omega_0} \ln 20$

soit $\tau_q = \frac{20}{\omega_0} \times \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \ln 20$

$\tau_q = \frac{2T_0'}{2\pi} \ln 20 \sqrt{Q^2 - \frac{1}{4}}$

$\tau_q = 0,95 \sqrt{Q^2 - \frac{1}{4}} T_0'$

Dans le cas où $Q \gg \frac{1}{2}$ alors $\tau_q \simeq Q T_0'$

Q représente donc un ordre de grandeur du nombre de pseudo-périodes décrites pendant le régime transitoire

6) $i = \frac{dq}{dt}$ donc $\frac{i}{C} + \alpha j\omega \underline{e} = j\omega \underline{u}$ EC
 et $j\omega \underline{e} (-\omega^2 m + \delta j\omega + k) + \alpha i = 0$

donc $\frac{i}{C} + \alpha \frac{(-\alpha) i}{-\omega^2 m + \delta j\omega + k} = j\omega \underline{u}$

soit $\underline{Z} = \frac{\underline{u}}{i} = \left(\frac{j\omega}{\frac{1}{C} - \frac{\alpha^2}{-\omega^2 m + \delta j\omega + k}} \right)^{-1}$
 $\underline{Z} = \left(\frac{jC\omega (-\omega^2 m + \delta j\omega + k)}{-\omega^2 m + \delta j\omega + k - \alpha^2 C} \right)^{-1}$

7) $\underline{Z_e} = \frac{\frac{1}{jCp\omega} \times (R_s + \frac{1}{jCs\omega} + jLs\omega)}{\frac{1}{jCp\omega} + R_s + \frac{1}{jCs\omega} + jLs\omega}$
 $= \frac{jR_s C s \omega + 1 - L_s C s \omega^2}{jC s \omega - R_s C s C p \omega^2 + jC p \omega + jL_s C p C s \omega^3}$
 $= \frac{1 + j\omega \frac{\delta}{k - \alpha^2 C} + (j\omega)^2 \frac{m}{k - \alpha^2 C}}{\frac{jC\omega}{k - \alpha^2 C} (-\omega^2 m + \delta j\omega + k)}$

Par identification entre les 2 expressions de $\underline{Z}_e$:

(3)

$$* R_s C_s = \frac{S}{k - \alpha^2 C} \quad (1)$$

$$* L_s C_s = \frac{m}{k - \alpha^2 C} \quad (2)$$

$$* L_s C_p C_s = \frac{C m}{k - \alpha^2 C} \quad (3)$$

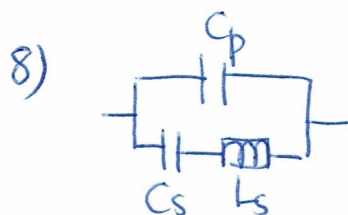
$$* C_p + C_s = \frac{k C}{k - \alpha^2 C} \quad (4)$$

$$\frac{(3)}{(2)} : \underline{C_p = C} ; \quad (4) : C_s = \frac{k C}{k - \alpha^2 C} - C = \frac{k C - k C + \alpha^2 C^2}{k - \alpha^2 C}$$

$$C_s = \frac{\alpha^2 C^2}{k - \alpha^2 C}$$

$$(1) R_s = \frac{S}{k - \alpha^2 C} \times \frac{k - \alpha^2 C}{\alpha^2 C^2} \quad \text{donc} \quad R_s = \frac{S}{\alpha^2 C^2}$$

$$(2) L_s = \frac{m}{k - \alpha^2 C} \times \frac{k - \alpha^2 C}{\alpha^2 C^2} \quad \text{donc} \quad L_s = \frac{m}{\alpha^2 C^2}$$



$$\underline{Z} = \frac{1}{j C_p \omega} \left(\frac{1}{j C_s \omega} + j L_s \omega \right)$$

$$= \frac{1}{j C_p \omega} + \frac{1}{j C_s \omega} + j L_s \omega$$

$$= \frac{1 - L_s C_s \omega^2}{j C_p \omega + j C_s \omega}$$

$$= \frac{1 - L_s C_s \omega^2}{j (C_p + C_s) \omega}$$

$$\underline{Z} = \frac{1 - L_s C_s \omega^2}{j (C_p + C_s) \omega (1 - \frac{L_s C_p C_s \omega^2}{C_p + C_s})}$$

On retrouve la forme de l'énoncé en posant :

$$\omega_s = \frac{1}{\sqrt{L_s C_s}} \quad \text{et} \quad \omega_p = \sqrt{\frac{C_p + C_s}{L_s C_p C_s}} > \omega_s$$

$$\text{soit } \omega_s = \sqrt{\frac{\alpha^2 C^2}{m}} \times \sqrt{\frac{k - \alpha^2 C}{\alpha^2 C^2}} = \sqrt{\frac{k - \alpha^2 C}{m}} = \omega_0$$

* Pour $\omega = \omega_s$: $|Z| = 0$, le quartz ne s'oppose pas au passage du courant = le courant est maximal, il y a résonance en intensité. (4)

* Pour $\omega = \omega_p$: $|Z| \rightarrow \infty$: le courant ne passe pas à travers le quartz - On parle alors d'antirésonance.

* Pour $\omega = \omega_s$ alors $Z_{\text{serie}} = \frac{1}{jC_s \omega_s} + jL_s \omega_s$ ($R_s = 0$)

$$Z_{\text{serie}} = 0$$

$\Rightarrow$ tout le courant passe par cette branche.

* $\frac{\omega_p^2 - \omega_s^2}{\omega_s^2} = \frac{\frac{C_p + C_s}{C_p} - 1}{1} = \frac{C_s}{C_p} = \frac{10^{-14}}{10^{-12}} \approx 10^{-2} \ll 1$

$\Rightarrow \omega_p$ et ω_s sont des pulsations très proches

On peut écrire $\frac{\omega_p^2 - \omega_s^2}{\omega_s^2} \approx \frac{(\omega_p - \omega_s)(\omega_p + \omega_s)}{\omega_s^2} \approx \frac{(\omega_p - \omega_s) 2\omega_s}{\omega_s^2}$

soit $\frac{\omega_p^2 - \omega_s^2}{\omega_s^2} \approx 2 \frac{\omega_p - \omega_s}{\omega_s}$

g) $Q = \frac{\omega_s}{\Delta \omega_s}$ avec $\Delta \omega_s$ = largeur de la bande passante autour de la pulsation de résonance

d'où $\Delta \omega_s = \frac{\omega_s}{Q} = 10^{-2} \omega_s$ avec $Q = 10^2$

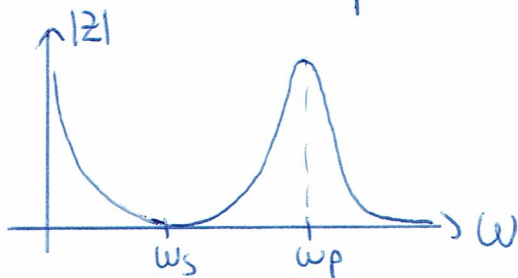
or $\omega_p - \omega_s = \frac{\omega_s}{2} \times 10^{-2} = \frac{1}{2} \Delta \omega_s$.

L'écart entre ω_s et ω_p est plus petit que la largeur de la bande passante $\rightarrow$ on ne peut pas séparer la résonance de l'antirésonance.

Par contre pour $Q = 10^5$ alors $\Delta \omega_s = 10^{-5} \omega_s$

et $\omega_p - \omega_s = 5 \cdot 10^{-3} \omega_s$

donc $\Delta \omega_s \ll \omega_p - \omega_s$: les 2 pulsations sont distinguables.



Dans le modèle avec R , $|Z|$ reste fini à la résonance.