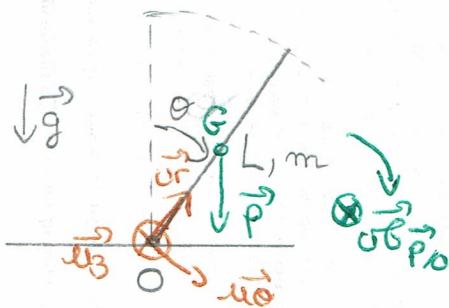


C.Rute d'un arbre.



At $t=0$ $\theta(0) = \theta_0 = 5^\circ$,

$\dot{\theta}(0) = 0$, arbre immobile.

1) Equation différentielle du mouvement.

TMC: $\frac{d\vec{\sigma}_{\text{arbre}/O}}{dt} = \vec{\sigma}_{P/O} = \vec{OG} \wedge \vec{P}$ avec $G = \text{point d'application de } \vec{P} = \text{centre de masse.}$

On a donc $\vec{\sigma}_{\text{arbre}/O} = J \ddot{\theta} \vec{u}_3$

et $\vec{\sigma}_{P/O} = mg \frac{L}{2} \sin \theta \vec{u}_3$

Projection du TMC / O_3 : $J \ddot{\theta} = mg \frac{L}{2} \sin \theta$

soit $\ddot{\theta} - \frac{mg}{J} \frac{L}{2} \sin \theta(t) = 0. \quad (1)$

⚠ * Ne pas faire l'approximation des petits angles car l'arc de la Rute, $\theta(t)$ varie de 5° à 90° .

* Ne pas écrire qu'on retrouve l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique. L'arbre n'oscille pas!

2) Expression de la vitesse angulaire $\dot{\theta}(t)$ en fonction de $\theta(t)$

On peut intégrer (1) par rapport au temps après l'avoir multipliée par $\dot{\theta}$:

(1) $\times \dot{\theta}$: $\ddot{\theta} \dot{\theta} - \frac{mg}{J} \frac{L}{2} \dot{\theta} \sin \theta = 0$

D'où $\frac{1}{2} \dot{\theta}^2 + \frac{mg}{J} \frac{L}{2} \cos \theta = \text{cte}$

On à $t=0$: $0 + \frac{mg}{J} \frac{L}{2} \cos \theta_0 = \text{cte}$

$\Rightarrow \dot{\theta} = \sqrt{\frac{mgL}{J} (\cos \theta_0 - \cos \theta)} = \sqrt{\frac{3g}{L} (\cos \theta_0 - \cos \theta)}$

3) Durée τ de la chute

$$\tau - 0 = \int_0^{\tau} dt = \int_0^{\tau} \frac{dt}{d\theta} d\theta = \int_{\theta_0}^{\pi/2} \frac{d\theta}{\dot{\theta}}$$

$$\Rightarrow \tau = \int_{\theta_0}^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{\frac{3g}{L}(\cos\theta_0 - \cos\theta)}} d\theta = \sqrt{\frac{L}{3g}} \times 5,1$$

d'où $\boxed{\tau = 5,1 \text{ s}}$