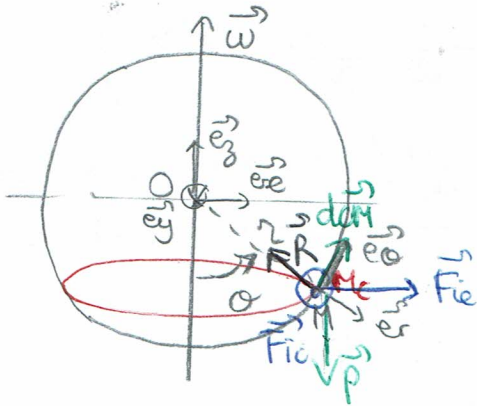


## Equilibre et stabilité en référentiel non galiléen.



On étudie le mouvement de l'anneau dans le référentiel du cerceau en rotation dans  $R_{labo}$  galiléen

$\Rightarrow$  non galiléen

$\Rightarrow$  forces d'inertie.

$$1) \vec{F}_{ic} = -m(\vec{a}_{Mc})_{R_{labo}}$$

avec  $M_c$  point fixe du cerceau qui coïncide avec  $M$  à  $t$ .

Ce point décrit dans  $R_{labo}$  une trajectoire circulaire uniforme de rayon  $r \sin \theta$  à

la vitesse angulaire  $\vec{\omega}$

d'où  $(\vec{a}_{Mc})_{R_{labo}} = -\omega^2 r \sin \theta \vec{e}_\theta$  (accélération centripète)

et  $\vec{F}_{ic} = +m\omega^2 r \sin \theta \vec{e}_\theta$  force centrifuge.

L'énergie potentielle est une fonction de la position de  $M$  donc une fonction de  $\theta$  définie par  $dE_p^{ent} = -\delta W_{\vec{F}_{ic}} = -\vec{F}_{ic} \cdot (d\vec{OM})_{R_{cerceau}}$  avec  $(d\vec{OM})_{R_{cerceau}} = r d\theta \vec{e}_\theta$

$$d'où \quad dE_p^{ent} = -m\omega^2 r \sin \theta \times r d\theta \cos \theta$$

$$\text{soit } E_p^{ent}(\theta) = -\frac{1}{2} m\omega^2 r^2 \sin^2 \theta + K_1$$

$$\text{or } E_p^{ent}(\theta=0) = 0 \text{ donc } K_1 = 0 \quad d'où \quad E_p^{ent}(\theta) = -\frac{1}{2} m\omega^2 r^2 \sin^2 \theta$$

$$2) E_p^{pes}(\theta) = mgz + K_2 \text{ avec } z = -r \cos \theta$$

$$\text{et } E_p^{pes}(\theta=0) = 0 = -mgr + K_2 \text{ donc } E_p^{pes}(\theta) = mgr(1 - \cos \theta)$$

$$3) \vec{R} \perp (d\vec{OM})_{R_{cerceau}}$$

$$* \vec{F}_{ic} = -2m\vec{\omega} \wedge (\vec{v}_M)_{R_{cerceau}} \quad \text{donc } \vec{F}_{ic} \perp (d\vec{OM})_{R_{cerceau}}$$

$\Rightarrow$  Ces 2 forces ne travaillent pas

$\Rightarrow E_p$  est constante (conservée nulle)

$$4) E_p(\theta) = mgr(1 - \cos\theta) - \frac{1}{2} m \omega^2 r^2 \sin^2\theta$$

$$= mgr \left( 1 - \cos\theta - \frac{1}{2} \frac{\omega^2 r}{g} \sin^2\theta \right)$$

$$\boxed{E_p(\theta) = K \left( 1 - \cos\theta - \frac{1}{2} \left( \frac{\omega}{\omega_c} \right)^2 \sin^2\theta \right)} \quad \text{avec } K = mgr$$

et  $\omega_c = \sqrt{\frac{g}{r}}$

5) \* Positions d'équilibre: exrema de  $E_p(\theta)$

\* ————— stables: minima de  $E_p(\theta)$

\* ————— instables: maxima de  $E_p(\theta)$

On  $\frac{dE_p}{d\theta} = 0$  pour  $\sin\theta - \frac{1}{2} \left( \frac{\omega}{\omega_c} \right)^2 \times 2 \sin\theta \cos\theta = 0$

soit pour  $\theta = 0, \pi$  ou

Positions qui existent  $\forall \omega$

Pour ces positions

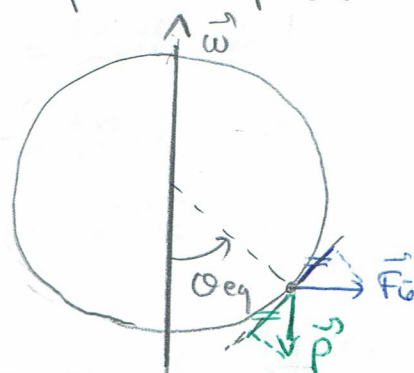
$$\vec{F}_{ie} = \vec{0}$$

$\vec{P}$  et  $\vec{R}$  se compensent

$$\cos\theta = \left( \frac{\omega_c}{\omega} \right)^2 \text{ si } \omega > \omega_c$$

positions qui existent  
lorsque le cerceau  
tourne vite

Cela est rendu possible par  
la  $\vec{F}_{ie}$  qui augmente et qui  
peut compenser le poids.



6)  $E_m = \text{cte}$  car soit les forces sont conservatives (elles sont associées à une  $E_p$ ) soit elles ne travaillent pas.

$$E_m = \text{cte} = \frac{1}{2} m (r \dot{\theta})^2 + mgr \left( 1 - \cos\theta - \frac{1}{2} \left( \frac{\omega}{\omega_c} \right)^2 \sin^2\theta \right)$$

Si on dérive par rapport au temps:

$$0 = m r^2 \dot{\theta} \ddot{\theta} + mgr \left( \dot{\theta} \sin\theta - \left( \frac{\omega}{\omega_c} \right)^2 \dot{\theta} \sin\theta \cos\theta \right)$$

Soit  $\dot{\theta} = 0 \forall t$  (pas de mouvement)

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{r} \sin\theta - \frac{g}{r} \left( \frac{\omega}{\omega_c} \right)^2 \sin\theta \cos\theta = 0}$$