

DYNAMIQUE DU POINT EN RÉFÉRENTIEL NON GALILÉEN

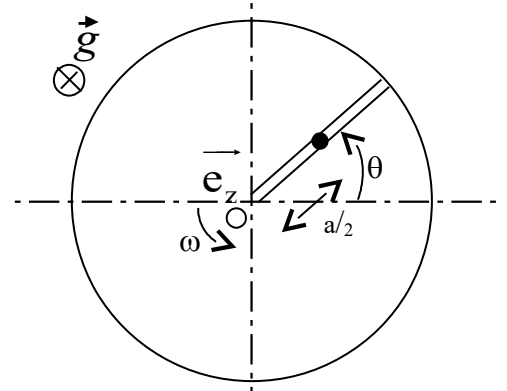
Exercice 1 : Référentiel en translation par rapport à un référentiel galiléen

On considère une cabine d'ascenseur au plafond de laquelle est suspendu un ressort sans masse de constante de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 . Un point matériel M de masse m est accroché à l'extrémité de ce ressort.

- 1) La cabine se déplace verticalement avec une accélération $(\overrightarrow{a_{\text{cabine}}})_{\text{Rsol}}$ dirigée vers le bas par rapport au référentiel terrestre supposé galiléen. Déterminez la longueur du ressort en équilibre dans la cabine.
- 2) Interprétez le cas où $(\overrightarrow{a_{\text{cabine}}})_{\text{Rsol}} = \vec{g}$.
- 3) Expliquer comment l'Airbus A310-Zéro-G permet d'obtenir un état d'impesanteur.

Exercice 2 : Référentiel en rotation par rapport à un référentiel galiléen

Un disque horizontal de rayon a est en rotation uniforme à la vitesse angulaire ω autour de Oz . A l'instant $t = 0$, la bille M de masse m est abandonnée sans vitesse initiale par rapport au disque dans une rigole creusée dans le disque depuis la position $OM_0 = a/2$.



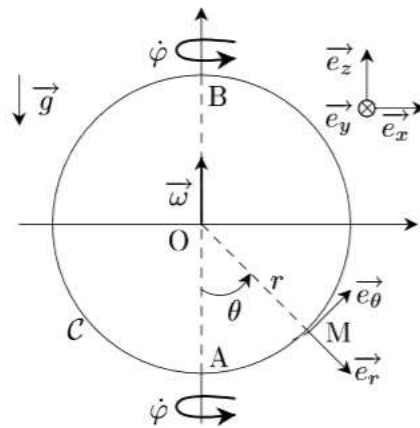
On note $x(t)$ la position de M dans la rigole à l'instant t

- 1) Déterminez l'expression de $x(t)$.
- 2) Déterminez l'expression de la réaction du support sur la bille.

Exercice 3 : Equilibre et stabilité

Un guide circulaire de centre O et de rayon r est en rotation uniforme à la vitesse angulaire $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z$ autour de son diamètre vertical ($\omega = \dot{\varphi} > 0$). Un anneau de masse m et assimilé à un point matériel coulisse sans frottement sur la circonférence. Son mouvement est repéré par un seul degré de liberté cinématique : l'angle θ compté positivement dans le sens indiqué sur le schéma ci-après.

Le référentiel d'étude est le référentiel (C) lié au cercle. Le repère $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ attaché rigidement à (C) est en rotation d'angle φ autour de l'axe vertical (Oz) du référentiel terrestre R_g supposé galiléen. Dans le plan (Oxz) , la base locale des coordonnées polaires $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ accompagne l'anneau M dans son mouvement. On notera $\vec{R}$ l'action du cercle (C) sur le point M .



- 1) Montrer que la force d'inertie d'entraînement dérive d'une énergie potentielle E_p^{ent} . Exprimer cette énergie potentielle en fonction de θ en prenant la position $\theta = 0$ comme état de référence :

$$E_p^{\text{ent}}(\theta = 0) = 0$$

- 2) Déterminer l'expression de l'énergie potentielle E_p^{pes} dont dérive le poids de M en fonction de θ en choisissant l'état de référence :

$$E_p^{\text{pes}}(\theta = 0) = 0.$$

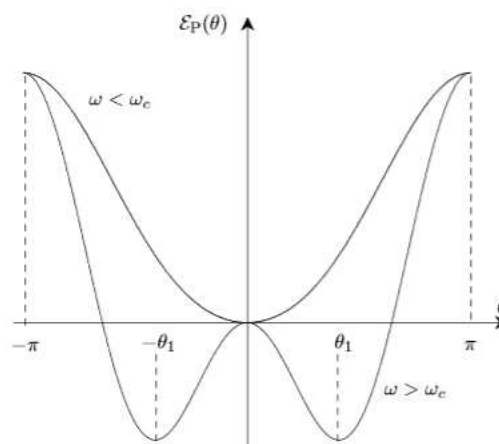
- 3) Montrer que les énergies potentielles dont dérivent la réaction $\vec{R}$ et la force d'inertie de Coriolis $\vec{F}_{ic}$ sont des constantes. On les fixera à 0.

- 4) Dédurre de ce qui précède que l'énergie potentielle totale peut se mettre sous la forme :

$$E_p(\theta) = K \left[1 - \cos \theta - \frac{1}{2} \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right)^2 \sin^2 \theta \right]$$

Déterminer K et ω_c en fonction de m, g et r.

- 5) Le tracé de l'énergie potentielle totale de M en fonction de θ fait apparaître deux cas :



Par une rapide analyse de ces deux courbes, commencer à prévoir les positions d'équilibre possibles de l'anneau dans (C). Discuter leurs conditions d'existence et leur stabilité.

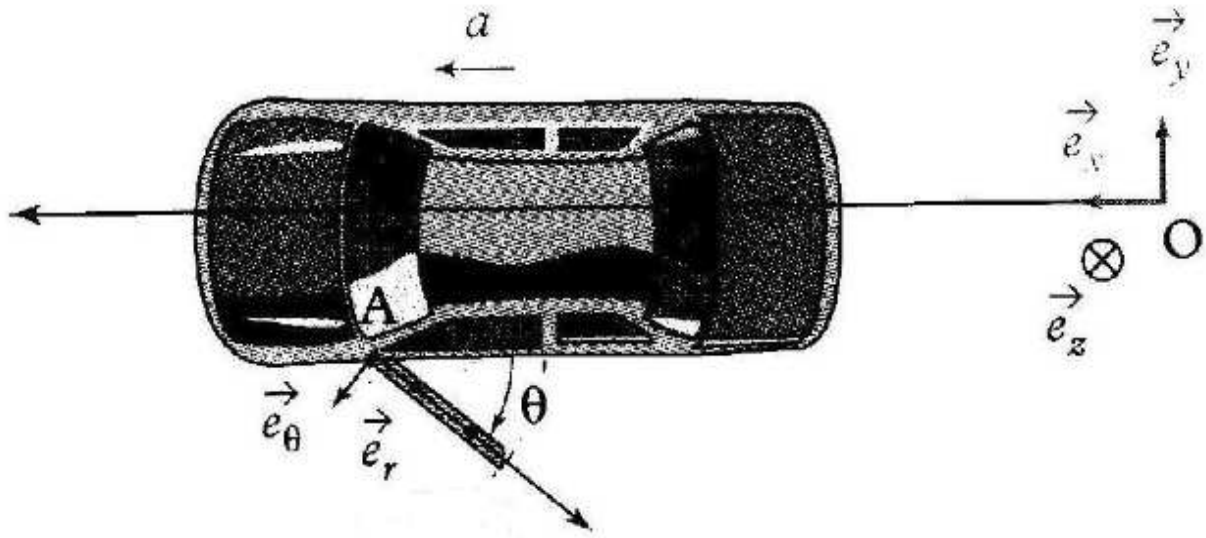
- 6) Ecrire la conservation de l'énergie mécanique en la justifiant et retrouver l'équation différentielle du mouvement.

Exercice 4 : Fermeture d'une portière de voiture

On étudie le mouvement d'une portière de voiture en accélération constante $\vec{a} = a_0 \vec{e}_x$

Pour cela on la modélise par une plaque rigide de masse m , de hauteur h et de longueur L en liaison pivot parfaite avec la voiture. Son moment d'inertie par rapport à son axe de rotation est noté $J = \frac{1}{3} mL^2$.

On note θ l'angle qu'elle fait avec la position fermée. Initialement $\theta(t=0) = \theta_0 = \frac{\pi}{2}$ et la voiture a une vitesse nulle.



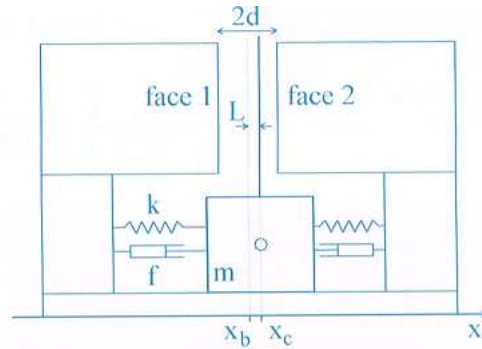
- 1) Déterminer l'équation différentielle du mouvement de la portière dans le référentiel de la voiture.
- 2) Dans le cas d'une Porsche, qui peut passer de 0 à 100 km.h⁻¹ en 3,1s, calculer la distance parcourue par la voiture à l'instant où la portière se ferme.

On donne $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta}} = 2,62$

Exercice 5 : Etude d'un accéléromètre (source BUP janvier 2010)

On étudie le fonctionnement d'un capteur 1 axe.

Le capteur, dit différentiel, est modélisé par un mobile de masse m posé sur un support horizontal et pouvant se déplacer le long de l'axe Ox . Le mobile est relié au support par des systèmes ressorts/amortisseurs (raideur k , coefficient de frottement fluide f)



Modélisation pour le mouvement sur l'axe de x d'un élément mobile

On note x_c la position du centre de masse du mobile en mouvement et x_b sa position au repos par rapport au support (c'est-à-dire en fait celle du support : x_b ne varie que si le support se déplace, c'est-à-dire si l'accéléromètre se déplace en bloc).

Ce mobile subit les effets de l'accélération $a(t)$ du support : le rôle de ce système est de permettre la mesure de cette accélération $a(t)$.

- 1) A partir de la modélisation proposée, déterminer l'équation différentielle du mouvement de la masse m vérifiée par $L = x_c - x_b$.

Note : On considère une force de frottement linéaire proportionnelle à la vitesse de la masse par rapport au fluide de l'amortisseur soit par rapport au bâti de l'accéléromètre : $\vec{F}_f = -f(\dot{x}_c - \dot{x}_b)\vec{e}_x$.

- 2) Mettre cette équation différentielle sous forme canonique en introduisant la pulsation propre du système ω_0 et son facteur de qualité Q .
- 3) Dans le cas où le mouvement du boîtier est sinusoïdal de pulsation ω , mettre la fonction de

transfert $\frac{\underline{L}}{\underline{a}_B}$ sous la forme $\frac{\underline{L}}{\underline{a}_B} = \frac{H_0}{1 + j\frac{\omega}{Q} - \omega^2}$ où $x = \frac{\omega}{\omega_0}$.

- 4) Quelle est la nature du filtrage réalisé par ce système mécanique ?
- 5) Dans quelle gamme de fréquence ce système constitue-t-il un accéléromètre ?

Les paires de faces en regard définissent deux condensateurs C_1 et C_2 de capacité dépendant de L

En effet, la capacité C d'un condensateur plan a pour expression : $C = \frac{\epsilon_0 S}{e}$ où S est la surface des armatures et e la distance entre les armatures.

- 6) Déterminer les expressions des capacités C_1 et C_2 en fonction de L
- 7) Expliquer quelle mesure permet de remonter à l'accélération.

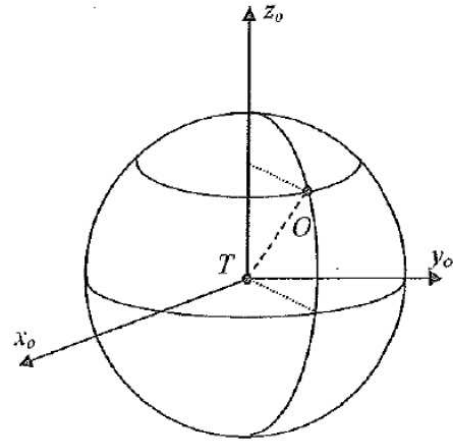
Exercice 6 : Déviation d'une bouée (ICNA 2012)

Afin de mettre en évidence un courant marin présent dans l'Océan Atlantique, des scientifiques s'intéressent au mouvement d'une bouée B, de masse m , assimilée à un point matériel.

On considère le référentiel géocentrique R_O (T , $\vec{e}_{xO}$, $\vec{e}_{yO}$, $\vec{e}_{zO}$), où $\vec{e}_{zO}$ est le vecteur unitaire de l'axe de rotation de la Terre (centre T , masse M_T , rayon R_T), supposé galiléen.

Le repère terrestre R_T (O , $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$) est pris en un point O de la surface terrestre avec $\vec{e}_z$ la direction verticale ascendante, $\vec{e}_x$ dirigé vers l'Est et $\vec{e}_y$ dirigé vers le Nord.

On note $\vec{\Omega}_T = \Omega_T \vec{e}_{zO}$ le vecteur rotation de la Terre par rapport à R_O . Soit G la constante universelle de gravitation et $\vec{g}$ le champ de pesanteur terrestre.



Dans le référentiel géocentrique supposé galiléen, la bouée est soumise à la force d'attraction de la Terre $\vec{F}_g$ et à la poussée d'Archimède due à l'eau notée $\vec{R} = R\vec{e}_z$ (on négligera la poussée d'Archimède de la part de l'air ainsi que les frottements).

A l'instant initial, la bouée se trouve à l'origine du repère terrestre, avec une vitesse initiale $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_x$ dans R_T . On suppose que le mouvement de la bouée s'effectue dans le plan horizontal xOy , à la latitude λ de 30° dans l'hémisphère Nord. On note $(x, y, 0)$ les coordonnées de B à un instant donné, avec $x \ll R_T$ et $y \ll R_T$.

On souhaite étudier le mouvement de la bouée B par rapport au référentiel terrestre non galiléen R_T .

1. Que représente la latitude λ ?
2. Exprimer la force d'attraction de la Terre sur la bouée $\vec{F}_g$.
3. Exprimer la force d'inertie d'entraînement $\vec{F}_{ie}$ subie par B dans R_T .
4. Définir le poids $\vec{P}$ de la bouée. Pour la suite de l'exercice, on considère que le poids est dirigé suivant la verticale descendante.
5. Faire un bilan des forces qui s'exercent sur la bouée.
6. Montrer que l'énergie cinétique de la bouée se conserve au cours du mouvement.
7. Appliquer le principe fondamental de la dynamique dans R_T et en déduire les équations différentielles du mouvement.
8. Résoudre ces équations différentielles pour obtenir les équations horaires $x(t)$ et $y(t)$. On pourra noter $u = x + iy$.
9. Etablir l'équation de la trajectoire. Décrire la nature du mouvement.
10. Est-ce que le mouvement de la bouée serait identique dans l'hémisphère Sud ?

Exercice 7 : Vent géostrophique

Le vent géostrophique se définit comme le vent qui résulterait de l'équilibre entre la force de Coriolis et la force de pression atmosphérique agissant sur une parcelle d'air.

Ce vent soufflerait parallèlement aux isobares dans l'atmosphère.

La plus grande partie de l'écoulement atmosphérique, au-dessus de la couche limite, en dehors des tropiques, est proche de l'équilibre géostrophique, ce qui en fait une approximation communément utilisée en météorologie. Toutefois, cet équilibre est rarement exact, en raison d'autres forces qui agissent sur le vent comme la friction (près du sol) ou la force centrifuge dans un écoulement courbé.

Cet exercice étudie le mouvement horizontal de masses d'air en équilibre géostrophique.

On considère une masse d'air assimilée à un point matériel M de masse δm situé dans l'atmosphère terrestre et repéré par ses coordonnées (x, y, z) dans le repère local $(Oxyz)$, dont l'origine O se trouve dans un plan méridien à la latitude λ , avec $0 \leq \lambda \leq \frac{\pi}{2}$ pour l'hémisphère Nord (figure (a)).

L'axe (Ox) est dirigé vers l'Est, l'axe (Oy) vers le Nord et l'axe (Oz) suivant le rayon terrestre.

Cette masse d'air est animée d'un mouvement horizontal donc sa vitesse peut s'écrire : $\vec{v} = v_x \vec{e}_x + v_y \vec{e}_y$

La vitesse angulaire de rotation propre de la Terre est $\Omega = \frac{2\pi}{86164} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

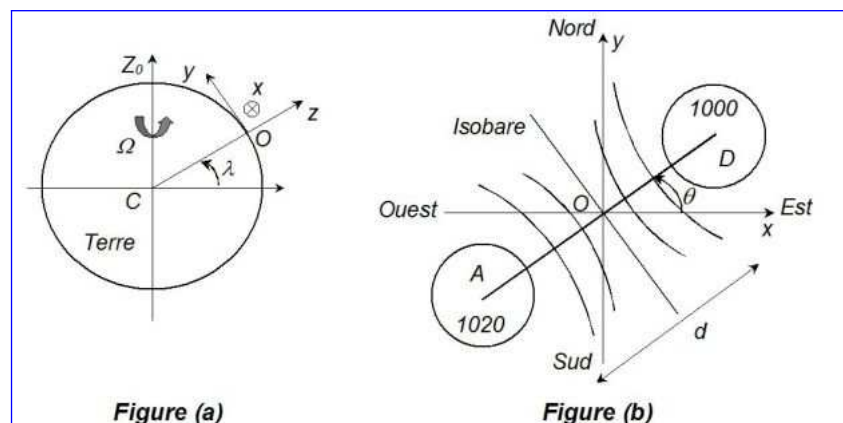
On considère la situation météorologique schématisée sur la figure (b), dans laquelle l'axe anticyclone-dépression fait un angle θ avec la direction (Ox).

La distance entre les isobares $P_A = 1\,020$ et $P_D = 1\,000$ est notée d , les pressions étant mesurées en hectopascals.

On supposera le gradient de pression uniforme sur l'axe (AD), de norme notée a . La force de pression qui s'exerce sur une particule d'air de masse δm s'écrit alors $\delta \vec{F} = -\frac{\delta m}{\rho} g \vec{\text{grad}} P$ avec

$\vec{\text{grad}} P = -a \vec{e}_r = \frac{-(P_A - P_D)}{d} \vec{e}_r$ et où ρ est la masse volumique de l'air et est le vecteur unitaire dirigé de A vers D.

Au niveau de l'axe (AD), les isobares sont perpendiculaires à cet axe et sont localement assimilables à des segments de droite.



Le référentiel géocentrique étant supposé galiléen, on se place dans le référentiel terrestre non galiléen.

1. Justifier qu'on prenne en compte le caractère non galiléen du référentiel terrestre dans cet exercice.
2. Écrire, en négligeant les forces de frottement, le principe fondamental de la dynamique pour la particule de fluide (de masse δm) dans le référentiel terrestre.
3. Exprimer les composantes δF_x et δF_y de la force massique de pression, le long de l'axe (AD), en fonction de a , ρ et θ .
4. Dans l'approximation géostrophique, la force de pression est compensée par la force de Coriolis. Montrer que le fluide atmosphérique s'écoule au niveau de l'axe (AD) suivant la direction d'une isobare. Préciser le sens de l'écoulement. Comment modifier ces conclusions dans l'hémisphère Sud ?
5. Calculer la norme du vecteur vitesse de la masse d'air. On donne : $d = 800 \text{ km}$, $\lambda = 42^\circ$ et $\rho = 1,3 \text{ kg.m}^{-3}$

Quelques résultats :

Exercice 1 : 1) $l = \frac{m \left(g - \left\| \left(\overrightarrow{a_{\text{cabine}}} \right)_{\text{sol}} \right\| \right)}{k} + \ell_0$

Exercice 2 : 1) $x = \frac{a}{2} \text{ch}(\omega t)$; 2) $\overrightarrow{R} = m\omega^2 a \text{sh}(\omega t) \overrightarrow{e_\theta} + mg \overrightarrow{e_z}$

Exercice 4 : 2) $\ddot{\theta} - \frac{3}{2} \frac{a}{L} \sin \theta = 0$

Exercice 5 : 1) $\ddot{L} + 2 \frac{f}{m} \dot{L} + 2 \frac{k}{m} L(t) = -a$; 7) $L = \frac{\varepsilon_0 S}{2} \left(\frac{1}{C_1} - \frac{1}{C_2} \right)$

Exercice 6 : 2) $\Delta = \frac{1}{3} \omega g \cos \lambda \left(\frac{2h}{g} \right)^{3/2} = 3 \text{ cm}$

Exercice 7 : 3) $\delta F_x = \frac{a}{\rho} \cos \theta$ et $\delta F_y = \frac{a}{\rho} \sin \theta$; 4) $\vec{v} = \frac{a}{2\rho\Omega \sin \lambda} (\sin \theta \vec{e}_x - \cos \theta \vec{e}_y)$